INTERPOLACIÓN CURVA DE TASAS DE INTERÉS

El rendimiento hasta el vencimiento de un bono es una medida útil para efectos de comparación. Sin embargo hay otras medidas que contienen mucha más información como por ejemplo las tasas cero cupón o las tasas forward a diferentes plazos. Normalmente los gobiernos no emiten bonos cero cupón sino que su deuda está compuesta por bonos que pagan cupones periódicamente. En este documento queremos exponer un método para obtener una curva cero cupón a partir de un conjunto de bonos. Este método se puede extender fácilmente a la curva swap ya que estos pueden ser tratados como bonos que cotizan a la par. Las curvas cero cupón pueden ser utilizadas para diferentes propósitos como por ejemplo valorar derivados financieros, identificar posibles bonos sub o sobrevalorados, realizar análisis de riesgos, entre otros.

En los libros de texto estándares nos explican tradicionalmente el método de "bootstraping" para obtener una curva cero cupón. La forma usual en que se expone el método nos indica que se debe obtener inicialmente el precio de un bono a 1 año que paga tanto el cupón como el principal al acabarse dicho período. Con este bono se puede obtener fácilmente la tasa cero cupón a ese plazo. Si por ejemplo quisiéramos obtener la tasa cero cupón compuesta continuamente de un bono con T años al vencimiento, bastaría utilizar la ecuación $P * \exp(rT) = 1$ y despejar r. En el "bootstraping" tradicional una vez obtenemos la tasa para el primer plazo vamos calculando las siguientes tasas mediante un proceso iterativo. Veamos un ejemplo sencillo de cómo se procede.

Supongamos que tenemos un bono con vencimiento dentro de un año y con cupón del 3%. Este bono cotiza en el mercado con un precio de 98.96. Como podemos obtener la tasa cero cupón equivalente? Lo primero que debemos hacer es hallar el precio del bono cero cupón. Este se puede obtener usando la siguiente ecuación:

$$98.96 = 103 \cdot P(1) \rightarrow P(1) = 0.96077$$

Si queremos obtener la tasa cero cupón compuesta continuamente utilizamos la fórmula que mencionamos anteriormente, esto es:

$$0.96077 * \exp(r \cdot 1) = 1 \rightarrow r = \ln\left(\frac{1}{0.96077}\right) = 0.040013$$

Ahora, si tenemos un bono con vencimiento dentro de dos años que tiene un cupón del 4% y cuyo precio de mercado es 99.56 podemos utilizar el siguiente procedimiento para obtener la tasa cero cupón de dos años.

$$99.56 = 4 \cdot P(1) + 104 \cdot P(2)$$

Como ya conocemos el valor del bono cero cupón a 1 año simplemente lo introducimos en la fórmula. Esto es:

$$99.56 = 4 \cdot 0.96077 + 104 \cdot P(2) \rightarrow P(2) = 0.920355$$

Con el precio del bono cero cupón de dos años podemos obtener nuevamente la tasa cero cupón así:

$$0.920355 * \exp(r \cdot 2) = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{0.920355}\right) = 0.041498$$

Podemos repetir este procedimiento varias veces y así ir conociendo las tasas cero cupón a plazos mayores.

Lo usual es que no contemos con la información exacta de bonos a 1,2,3…años. Por ello en lugar de utilizar un método de bootstraping clásico como el ilustrado anteriormente, debemos combinarlo con alguna técnica de interpolación. El método utilizado en este documento es el siguiente:

Si tenemos un conjunto de B_1,….B_N bonos con cupones y con plazos al vencimiento crecientes del tipo $T_1 < T_2 < …….. < T_N$ el esquema general que debemos utilizar es el siguiente:

a) Definir $P(0) = 1$
b) Para un valor de prueba $P(T_1) = P^*$ utilizar algún método de interpolación para obtener los valores de $P(t)$ para todos los valores $0 < t < T_1$. Luego debemos calcular el precio estimado del bono con vencimiento T_1, B^* usando todos los bonos cero cupón $P(t)$ que tenemos hasta ahora. Definimos luego el error cuadrático como la diferencia entre el valor estimado B^* y el valor real del bono B_1 elevada al cuadrado. Esto es $(B^*-B_1)^2$. Utilizamos un procedimiento de optimización para buscar que el valor del error cuadrado tienda a cero cambiando el valor de P^*.
c) Repetimos el procedimiento para todos los plazos hasta llegar a T_N

Hay dos aspectos fundamentales que debemos definir al utilizar este método. El primero es definir el método de interpolación a utilizar. Podemos usar interpolación lineal, cuadrática, polinomial, exponencial, etc. En la herramienta que adjuntamos utilizamos un método de interpolación cúbica denominado splines cúbicos Broadlie. Este es un método un poco mejor que los splines cúbicos naturales el cual explicamos con detalle en nuestra herramienta **INTERPOLACIÓN DE LA SUPERFICIE DE VOLATILIDADES**. La ventaja de los splines Broadlie es que conservan la monotonicidad y el rango. En el anexo 1 al final del documento explicamos en que consiste el método. El segundo aspecto a definir es la variable a interpolar. Las variables más utilizadas son las tasas cero cupón o las tasas forward.

En conjunto con este documento adjuntamos un archivo de EXCEL en donde ilustramos este procedimiento de Bootstraping e interpolación utilizando bonos del tesoro americano, los cuales se conocen como Treasuries o Tesoros. En la Tabla 1 mostramos los bonos que utilizamos para ilustrar el método. Los precios de estos bonos estaban vigentes a la fecha 3 de febrero de 2011. Tenemos un total de 7 bonos de vencimientos entre 1 mes y 9 años. Los bonos de vencimientos menores a 1 año se denominan Treasury Bills y cotizan como una tasa de descuento. Los bonos con mayores vencimientos cotizan en precio limpio en término de treintaidosavos.

Tabla 1

TIPO BONO	No	VENCIMIENTO	CUPÓN	CONTEO DÍAS	FECHAS PAGO CUPÓN	PRECIO DE MERCADO	
						PRECIO	TIPO
Treasury Bills	1	3/3/2011	-	Act/360	-	0.134	Tasa de Descuento
	2	8/4/2011				0.167	
	3	1/12/2012				0.261	
Treasury Notes and Bonds	4	1/31/2013	2.875	30/360	Jan 31 Jul 31	104 – 13	32 - nds
	5	1/15/2014	1		15-Jan 15-Jul	99 – 19	
	6	1/31/2016	2		31-Jan 31-Jul	99 – 08	
	7	8/15/2019	3.625		15-Feb 15-Aug	102 - 31	

Como podemos observar los tres primeros bonos son bonos cero cupón por lo tanto la obtención de sus tasas spot es un proceso trivial. Por ejemplo al primer bono le quedan 28 días al vencimiento, es decir 0.078 años. Como su tasa de descuento es 0.134% su precio viene dado por $100 \cdot (1 - 0.134\% \cdot 0.078) = 99.98958$. Para obtener la tasa cero cupón compuesta continuamente[1] podemos usar la ecuación $P * \exp(rT) = 1$

Esto es $0.9998958 * \exp\left(r \cdot \frac{28}{365}\right) = 1 \rightarrow r = \ln\left(\frac{1}{0.9998958}\right) \cdot \frac{365}{28} = 0.1358\%$

El primer bono con cupones que tenemos es el que vence en Enero 31 de 2013. Este bono paga cupones semestrales en los meses de Enero y Julio y tiene un precio de mercado de 104 $^{13/32}$ = 104.4063. Por convención el precio de mercado es el precio limpio, es decir aquel que no tiene en cuenta los intereses acumulados. En nuestro método de interpolación debemos utilizar el precio sucio por lo cual debemos

[1] Las tasas cero cupón pueden estar compuestas de cualquier otra manera. Las tasas compuestas continuamente son útiles para valorar derivados que contengan opcionalidad como por ejemplo CAPS, FLOORS, SWAPTIONS, etc.

sumar los intereses acumulados. La forma de calcular los precios sucios se ilustra en la página insumos del archivo de EXCEL. El precio sucio de este bono es 104.4301. En la Tabla 2 podemos ver como funciona el método.

Tabla 2

					FLUJOS DE CAJA DE BONOS				
NODO	**FECHAS FC**	**T**	**TASA CC**	**BONO CC**	**BONO 1**	**BONO 2**	**BONO 3**	**BONO 4**	
	2/3/2011	0.0000	0.1359%	1					
	2/15/2011	0.0329	0.1359%	1.0000					
1	3/3/2011	0.0767	0.1359%	0.9999	100.0000				
	7/15/2011	0.4438	0.1635%	0.9993					
	7/31/2011	0.4877	0.1681%	0.9992				1.4375	
2	8/4/2011	0.4986	0.1694%	0.9992		100.0000			
	8/15/2011	0.5288	0.1732%	0.9991					
3	1/12/2012	0.9397	0.2650%	0.9975			100.0000		
	1/15/2012	0.9479	0.2673%	0.9975					
	1/31/2012	0.9918	0.2799%	0.9972				1.4375	
	2/15/2012	1.0329	0.2920%	0.9970					
	7/15/2012	1.4466	0.4305%	0.9938					
	7/31/2012	1.4904	0.4467%	0.9934				1.4375	
	8/15/2012	1.5315	0.4622%	0.9929					
	1/15/2013	1.9507	0.6307%	0.9878					
4	1/31/2013	1.9945	0.6493%	0.9871				101.4375	
					99.98958	99.91557	99.751325	104.4301	**Precio Calculado**
					99.98958	99.91557	99.751325	104.4301	**Precio de Mercado**
					0.00000	0.00000	0.00000	-0.00003	**Diferencia**

Como ya habíamos mencionado los tres primeros bonos son cero cupón por lo tanto la obtención de sus tasas cero cupón se da inmediatamente. Para obtener la tasa cero cupón del 4 bono utilizamos un procedimiento iterativo. Allí comparamos el valor de mercado real contra un valor estimado nuestro. El valor estimado viene de cambiar la tasa cero cupón de forma tal que el error cuadrático entre el valor de mercado y el valor estimado sea mínima. Para ellos podemos utilizar el solver de EXCEL o la función buscar objetivo.

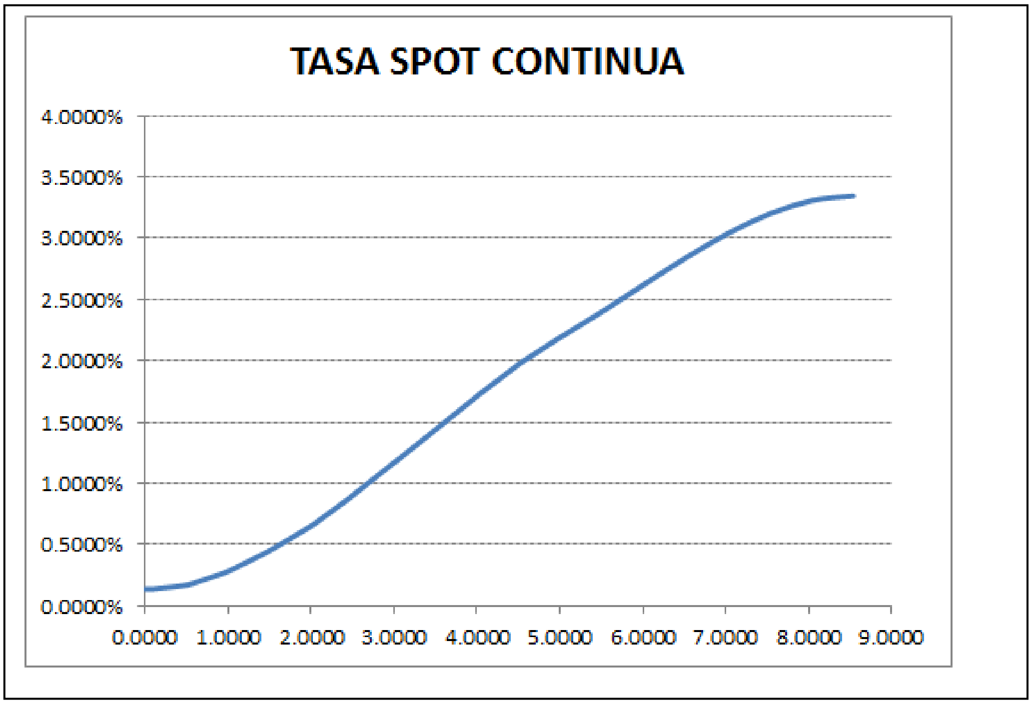
Observemos que la segunda columna contiene todas las fechas en donde tenemos flujos de caja de nuestro conjunto de bonos. No todos los bonos van a tener cupones en dichas fechas pero por lo menos uno de ellos si. Las celdas en azul contienen los valores que vamos a ir cambiando para minimizar los errores cuadráticos y los valores que están entre ellos contienen la fórmula de interpolación cúbica. En este caso tenemos una ecuación del tipo

$$f(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3$$

Los parámetros a_i, b_i, c_i y d_i vienen dados por unas ecuaciones específicas que se explican en el anexo 1.

Este mismo procedimiento lo debemos repetir para todo nuestro conjunto de bonos. Como el método de interpolación no es totalmente local, al optimizar un nuevo nodo el nodo anterior varía. Por lo tanto debemos devolvernos y buscar nuevamente el valor que minimiza la diferencia. Afortunadamente el método converge rápidamente y no son necesarios muchos recálculos. Cuando terminamos de iterar todos los nodos obtenemos la curva cero cupón tal y como se ilustra en la Figura 1

Figura 1



Para terminar queremos hacer dos comentarios.

a) Hay diferentes métodos de interpolación. El ilustrado en este documento es bastante utilizado y puede ser muy útil cuando se cuenta con un conjunto amplio de bonos. Hay otros métodos que se denominan parsimoniosos como por ejemplo el método de Nelson y Siegel o el del Svensson que son útiles cuando no se tienen un conjunto de bonos muy amplio.
b) Una vez se tiene la curva cero cupón se puede utilizar de diversas formas. Uno de los principales usos es mirar que bonos estan sobre o sub valorados respecto a la curva. Hay muchos bonos que contienen primas de liquidez porque no son bonos ON THE RUN. Con una curva cero cupón se puede analizar cuál sería su valor justo sin considerar la prima de liquidez y con base en este análisis decidir si la prima se justifica o no. Otro uso importante de la curva cero cupón es obtener las duraciones parciales o Key Rate Duration. Este método lo exponemos con detalle en nuestro curso de **TASAS DE INTERÉS BÁSICO**

ANEXO 1

Recordemos que en los splines cúbicos naturales tenemos una serie de N puntos $t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_N$ y que además conocemos los valores de una función f en dichos puntos $f(t_1) = f_1, f(t_2) = f_2 \ldots\ldots f(t_N) = f_N$

Lo que queremos hacer es aproximar la función f mediante un polinomio de grado 3. Esto lo hacemos por tramos en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

$f(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3$ donde $t \in [t_i, t_{i+1}]$

Recordemos que en este método existen algunas condiciones sobre la primera y segunda derivada. Para mayor detalle podemos consultar nuestra herramienta **INTERPOLACIÓN DE LA SUPERFICIE DE VOLATILIDADES** en el anexo 1.

Los splines Broadlie lo que hacen es suponer que también conocemos el valor de la primera derivada. De esta forma podemos resolver nuestro sistema que tiene 4(N-1) incógnitas ya que tenemos el mismo número de ecuaciones. Estas vienen dadas por:

$$a_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, N-1$$
$$b_i = f'_i, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

$$a_i + b_i(t_{i+1}-t_i) + c_i(t_{i+1}-t_i)^2 + d_i(t_{i+1}-t_i)^3 = f_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$b_i + 2c_i(t_{i+1}-t_i) + 3d_i(t_{i+1}-t_i)^2 = f'_{i+1}, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

Estas ecuaciones se pueden resumir de la siguiente manera:

$$a_i = f_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$b_i = f'_i, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$c_i = (3\Delta'_i - f'_{i+1} - 2f'_i) / \Delta_i, \quad i = 1, \ldots, N-1$$
$$d_i = (f'_{i+1} + f'_i - 2\Delta'_i) / \Delta_i^2, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

donde

$$\Delta_i = t_{i+1} - t_i \qquad \Delta_i' = \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Debido a que en la práctica no conocemos las primeras derivadas , las podemos aproximar de la siguiente manera:

(1) $f_1^{'}(t) = \Delta_1^{'}$

(2) $f_N^{'}(t) = 0^{'}$

(3) $f_i^{'}(t) = \dfrac{\Delta_{i-1}^{'}\Delta_i^{'}}{\alpha_i \Delta_{i-1}^{'} + (1-\alpha_i)\Delta_i^{'}}$ si $\Delta_{i-1}^{'}\Delta_i^{'} \geq 0$. De lo contrario $f_i^{'}(t) = 0$

En este caso

$$\alpha_i = \frac{\Delta_{i-1} + 2\Delta_i}{3(\Delta_{i-1} + \Delta_i)}$$

En el archivo de EXCEL adjunto se ilustra la implementación de este método.