La fórmula de Black – Swaptions

Tal y como los explicamos en nuestro documento "La fórmula de Black", es posible valorar instrumentos que se basan en la existencia de una tasa de interés estocástica usando una fórmula sencilla similar a "La fórmula de Black-Scholes".

Esta es la última de 3 herramientas que publicamos para valorar algunas opciones sobre tasas de interés. En este documento vamos a mostrar la fórmula para valorar Swaptions. Recordemos que un SWAPTION es una opción para entrar en un Swap de Tasa de Interés en el futuro. Si el Strike es igual que el del Forward Start Swap, el Swaption se dice que está "At The Money" - ATM. La relación que existe entre un forward y una opción sobre un activo es similar a la que existe entre un Swaption y un Forward Start Swap.

Una forma simple de mirar el Payoff de un swaption es como una opción sobre la tasa Swap. Tal y como lo ilustramos en nuestro documento "Valoracion de Swaps de tasa de interés" el valor de un swap de tasa de interés en donde se recibe fija y se paga flotante (Swap Receptor) puede expresarse como:

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[P(t,T_i) \cdot Tasa\_Fija \cdot \tau(T_{i-1},T_i) \right] - \left[P(t,T_0) - P(t,T_N) \right]$$

T_0 en este caso indica la fecha en la que el swap va a comenzar a intercambiar intereses y T_N la fecha en que finaliza.

Dado que al inicio el valor de un swap es cero, la TASA SWAP es la tasa fija que hace que el valor de la transacción sea cero. Esta viene dada por:

$$Tasa\_SWAP = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=1}^{n} \left[P(t,T_i) \cdot \tau(T_{i-1},T_i) \right]}$$

De allí que el valor de un swap receptor pueda expresarse como:

$$V(t) = Tasa\_Fija \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[P(t,T_i) \cdot \tau(T_{i-1},T_i) \right] - Tasa\_SWAP \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[P(t,T_i) \cdot \tau(T_{i-1},T_i) \right]$$

$$V(t) = (Tasa\_Fija - Tasa\_SWAP) \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} \left[P(t,T_i) \cdot \tau(T_{i-1},T_i) \right] \right]$$

El término

$$A(t,T_0,T_N)=\sum_{i=1}^{n}\left[P(t,T_i)\cdot\tau(T_{i-1},T_i)\right]$$

se conoce como anualidad.

Los perfiles de pago de un swaption receptor y pagador pueden entonces expresarse como:

$$PAYOFF_{SWAPTION\_RECEPTOR}=MAX\left[(K-Tasa\_SWAP),0\right]\cdot A(t,T_0,T_N)\cdot L$$

$$PAYOFF_{SWAPTION\_PAGADOR}=MAX\left[(Tasa\_SWAP-K),0\right]\cdot A(t,T_0,T_N)\cdot L$$

En este caso L representa el nominal de la transacción.

Podemos observar que un Swaption pagador es equivalente a una CALL sobre la tasa de Swap. K representa el strike, por lo que el comprador del Swaption se beneficiará de subidas en la tasa de interés por encima de este nivel. Esta opción puede ser valorada con la fórmula de Black. Esto debido a que la tasa swap es una martingala bajo la medida de probabilidad A que usa a la anualidad como activo numerario. Esto se explica con detalle en el Capítulo 22 del libro de Hull. Por ahora nos bastará conocer que la fórmula para valorar cada Swaption cuando t=0 viene dada por la siguiente expresión:

$$SWAPTION\_PAGADOR=L\cdot A(t,T_0,T_N)\left[Tasa\_SWAP\cdot N(d_1)-K\cdot N(d_2)\right]$$

$$d_1=\frac{\ln\left(\frac{Tasa\_SWAP}{K}\right)+\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T_0}{\sigma\sqrt{T_0}}\qquad d_2=d_1-\sigma\sqrt{T_0}$$

El Swaption Receptor se pueden valorar como una put.

Para realizar la valoración de un SWAPTION debemos entonces seguir los siguientes pasos:

1. **Obtener una curva cero cupón:** Esta curva la necesitamos por dos motivos. El primero es para calcular la tasa del forward start swap. Esta es la tasa que hace que la sumatoria de los flujos a tasa fija sea igual a la sumatoria de los flujos a tasa variable. El segundo es que a partir de la curva cero cupón podemos obtener la anualidad $A(t,T_0,T_N)$.

   La curva cero cupón se obtiene a partir de la información de diferentes instrumentos del mercado, usualmente swaps de tasas de interés. Puede consultar nuestro documento "Interpolación Curva de Tasas de Interés" para conocer cómo se puede obtener una curva cero cupón a partir de instrumentos que pagan cupones periódicos.

2. **Obtener la volatilidades para el SWAPTION:** En general el mercado tendrá una volatilidad implícita que podemos ingresar en la fórmula. El estándar del mercado es cotizar una volatilidad de Black para Swaptions que empiecen en un período T_0 por hasta un tiempo T_N. esta relación nos daría una matriz. Sin embargo como tenemos diferentes strikes no bastará con la información de la matriz sino que tendremos un "CUBO DE VOLATILIDAD".

   Si no tenemos acceso a volatilidades implícitas podemos calcular la volatilidad histórica de las tasas de interés para tener una idea de que valor de volatilidad podemos esperar hacia el futuro. En nuestro documento "Opciones sobre bonos – F Black" ilustramos como se puede calcular la volatilidad histórica para el rendimiento al vencimiento de un bono. Algo similar se podría hacer para la tasa swap

3. Una vez tenemos la curva cero cupón y la volatilidad implícitas podemos valorar el Swaption ya que el resto de la información como el strike o el plazo al vencimiento están definidas en el contrato.

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos encontrar el valor de un Swaption ejercible dentro de 1 año para entrar en un Swap Pagador por 5 años que cambia tasa fija pagadera cada semestre por LIBOR flat pagadera cada trimestre. El strike de este Swaption es 3% y vamos a usar una volatilidad del 39.35%

En la Figura 1 ilustramos la valoración de este Swaption. En este caso tenemos la curva cero cupón ya calculada, expresada en término de factores de descuento. Como lo mencionamos anteriormente, estos nos sirven para calcular la tasa del forward start swap y para calcular la anualidad. La tasa del forward start swap la calculamos con la fórmula:

$$Tasa\_SWAP = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{\sum_{i=1}^{n}\left[P(t,T_i)\cdot \tau(T_{i-1},T_i)\right]}$$

Esta tasa nos da 2.35731%. Vemos que el valor total del Swaption es 0.8229% utilizando como fecha de valoración el 13 de diciembre de 2013. Adjuntamos un archivo de EXCEL junto con este documento en donde se pueden observar detalladamente los cálculos.

Figura 1

Fecha Valoración	**12/13/2013**
Notional	$ 10,000,000.00
Strike	3.00000%
Fwd Start Swap Rate	2.35731%
T	1.01

Fch pag	FD	Dias	FC	VPN Fijo	VPN Flot	Anualidad
12/17/2014	0.997117					
03/17/2015	0.996189					
06/17/2015	0.995021	180	117,865	117,279		0.50
09/17/2015	0.993515					
12/17/2015	0.991571	180	117,865	116,872		0.50
03/17/2016	0.989069					
06/17/2016	0.985861	180	117,865	116,199		0.49
09/19/2016	0.98187					
12/19/2016	0.977349	182	119,175	116,476		0.49
03/17/2017	0.972104					
06/19/2017	0.965989	180	117,865	113,857		0.48
09/18/2017	0.959596					
12/18/2017	0.952758	179	117,211	111,673		0.47
03/19/2018	0.945392					
06/18/2018	0.937614	180	117,865	110,512		0.47
09/17/2018	0.929447					
12/17/2018	0.920914	179	117,211	107,941		0.46
03/18/2019	0.912378					
06/17/2019	0.903542	180	117,865	106,496		0.45
09/17/2019	0.894327					
12/17/2019	0.884956	180	117,865	104,306		0.44
				$ 1,121,610.00	$ 1,121,610.00	4.76
				NETO	$ -	

Swaption	
σ	39.35%
d1	-0.4115
d2	-0.8072
N(d1)	0.3403
N(d2)	0.2098
Precio Swaption Pagador	0.8229%

En la Figura 2 podemos observar el cálculo obtenido por medio de Bloomberg. Allí vemos que el valor del Swaption es 0.8272% con lo que la diferencia con nuestro precio calculado en EXCEL es inferior al 0.5%. Las diferencias pueden darse debido al conteo de días o la forma de calcular la distribución normal. Sin embargo vemos que obtenemos valores bastante similares. Para valorar un Swaption Receptorse sigue un procedimiento bastante similar.

Quant Trading
www.quant-trading.co

Figura 2

Fuente: Bloomberg

Referencias

- HULL, J. (2006). Futures, Options and Other derivatives.