Fórmula para opciones binarias

Se puede obtener una fórmula para el precio de una opción binaria utilizando un procedimiento similar al que desarrollamos cuando obtuvimos la Fórmula de Black-Scholes. Los supuestos más importantes que hicimos eran tener una tasa de interés constante al igual que la volatilidad, y suponer que el activo subyacente seguía un Movimiento Browniano Geométrico.

La fórmula de la CALL y la PUT binarias vienen dadas por las ecuaciones (1) y (2) respectivamente.

(1) $C = \mathrm{PAGO} \cdot e^{-rT} N(d_2)$

(2) $P = \mathrm{PAGO} \cdot e^{-rT} N(-d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde:

F: Forward K:Strike, r:Tasa interés T: Tiempo al vencimiento de la opción

σ: Volatilidad N(x): Distribución de probabilidad normal acumulada.

Todas estas variables las podemos obtener del mercado. Quizás la más difícil de obtener para una persona que apenas se inicia en el mundo de las opciones sea la volatilidad implícita. Sin embargo con una breve lectura del documento anterior se puede entender cómo obtenerla.

Veamos un ejemplo de cálculo del precio de una opción binaria.

Supongamos que el precio spot del USDCAD en este momento es 1.40, la tasa de interés en Estados Unidos es 0.5% al igual que en Canadá. La volatilidad implícita en opciones de corto plazo del USDCAD está cercana al 10%.

Si queremos sacar el valor de una CALL Binaria con strike de 1.40 y vencimiento en 1 mes que paga CAD 1000 si el USDCAD finaliza por encima de 1.40, podemos insertar los siguientes datos en la fórmula:

S = 1.40, K=1.40, F=1.40*exp((0.005-0.005)*30/365) = 1.40, T = 30/365 , σ=0.10

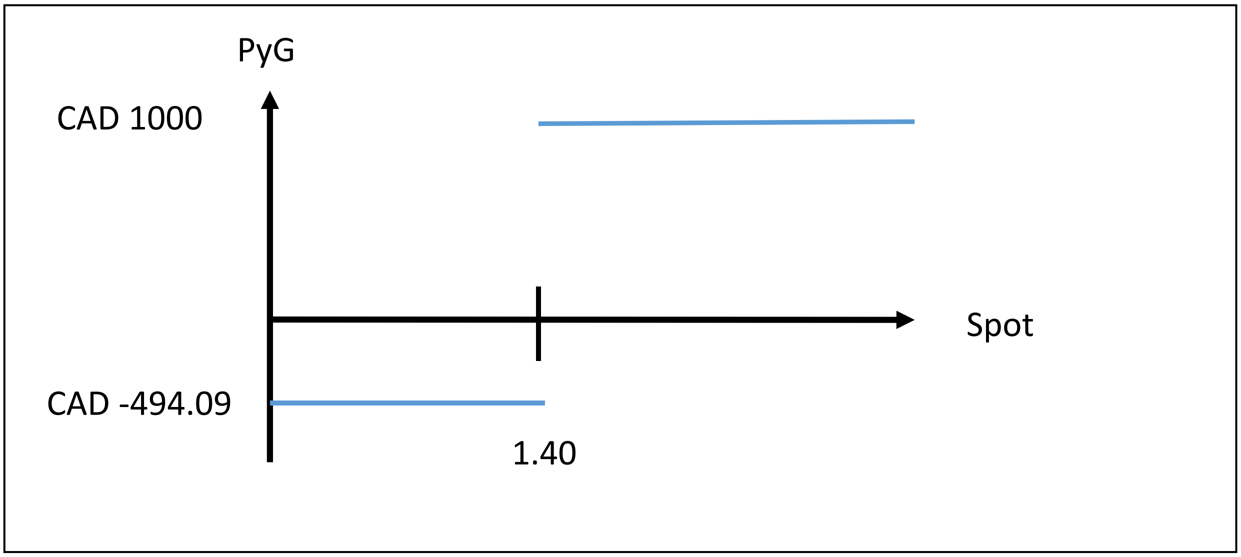
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{1.4}{1.4}\right) + \left(\frac{0.10^2}{2}\right)0.08219}{0.15\sqrt{0.08219}} = 0.014335 \qquad d_2 = 0.014335 - 0.0287 = -0.014335$$

$$C = 1000 \cdot \exp(-0.005 \cdot 0.08219) \cdot N(-0.014335) = 494.09$$

El valor de la opción según estos parámetros sería CAD 494.09

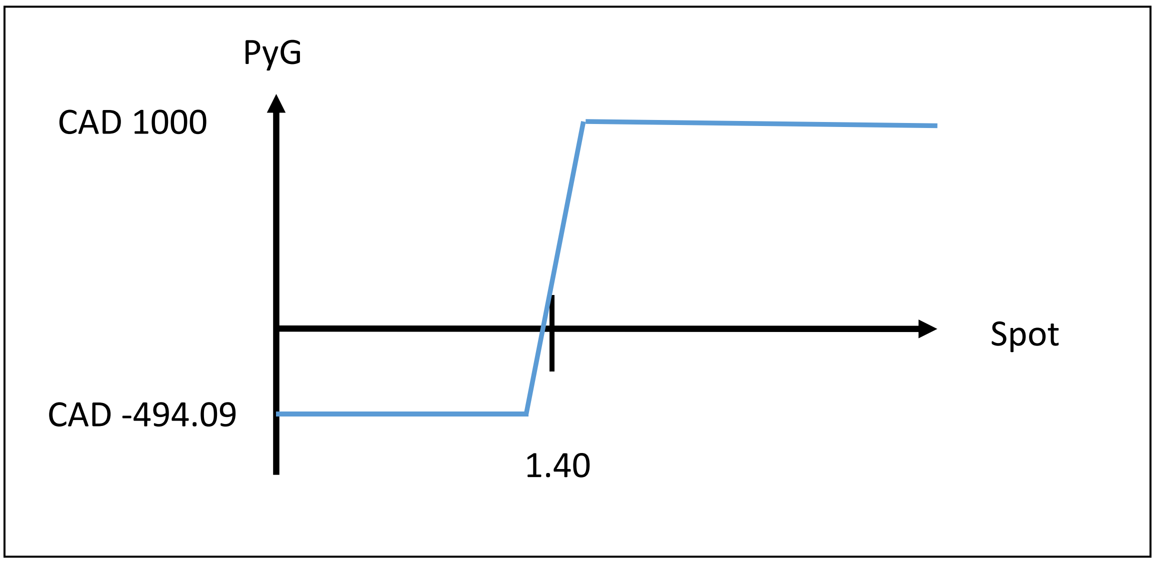
Este precio que obtuvimos es un precio teórico usando el modelo de Black-Scholes el cual tiene algunos supuestos que ya mencionamos anteriormente. En el Anexo describimos con detalle cómo obtuvimos la fórmula. Veamos ahora en la Figura 1 como es el perfil de pagos de esta posición si compramos la CALL.

Figura 1



Podemos observar que el perfil de pagos es discontinuo. Pasa de estar en CAD -494.09 a estar en CAD 1000 instantáneamente cuando el spot sube de 1.40. Esta situación hace que las opciones binarias sean un poco difíciles de administrar. Sin embargo podemos observar en la Figura 2 que se pueden replicar de una manera no perfecta usando un CALL spread. En nuestro curso de opciones básico explicamos detalladamente en que consiste esta estrategia.

Figura 2



Entre más pequeño sea el CALL spread mucho más parecido será a una CALL digital. Por lo tanto podríamos hallar también el valor de una opción digital como el valor de un CALL spread infinitesimal. Recordemos que comprar un CALL spread no es más que comprar una CALL con strike K1 y vender una CALL con strike K2, con K2>K1. Usando la calculadora de Black-Scholes podemos encontrar las primas de estas opciones. Esto lo podemos ver en la Figura 3.

Figura 3

SPOT	1,4000			d1	0,016826
STRIKE	1,3999			N(d1)	0,5067
VOLATILID/	10,00%			N(-d1)	0,4933
INTERES 1	0,50%			d2	-0,01184298
INTERES 2	0,50%			N(d2)	0,4953
NUMERO DE	30			N(-d2)	0,5047
Tiempo Vct	0,0821918				
			call	$	0,01605
			put	$	0,01595

SPOT	1,4000			d1	0,011843
STRIKE	1,4001			N(d1)	0,5047
VOLATILID/	10,00%			N(-d1)	0,4953
INTERES 1	0,50%			d2	-0,01682595
INTERES 2	0,50%			N(d2)	0,4933
NUMERO DE	30			N(-d2)	0,5067
Tiempo Vct	0,0821918				
			call	$	0,01596
			put	$	0,01606

Podemos observar que replicamos la CALL digital usando un CALL spread con strikes de 1.3999 y 1.4001, es decir un CALL spread de 2 pips de amplitud. Cuál es el nominal que debe tener el CALL spread para poder replicar la CALL digital? La respuesta es sencilla. Si queremos un pago de CAD 1000, el nominal debe ser calculado de forma tal que: PAGO = Nominal x spread

Despejando este valor podemos observar que el nominal de las opciones CALL debe ser USD 5.000.000.

Pago		1000
Spread		0,0002
Nominal	$	5.000.000
CALL 1	$	80.272,89
CALL 2	$	79.778,81
Neto	-$	494,08

Con este nominal la prima de la CALL con strike 1.3999 será CAD 80,272.89 y el de la CALL con strike K2 será 79,778.81. La compra del CALL spread cuesta entonces 494.08 que es prácticamente igual al valor que obtuvimos antes. Notemos sin embargo que para producir una PAGO de sólo CAD 1000 tuvimos que hacer un nominal 5000 veces más grande. Entre más estrecho sea el CALL spread que se utilice para replicar, mucho más grande el nominal que debo usar en las opciones.

Si hubiéramos usado un CALL spread con strikes de 1.39 y 1.41, el nominal de las opciones debería ser tan sólo USD 50.000 y el precio del CALL spread sería 494.25. Entre más amplio sea el CALL spread, mayor será la diferencia con el precio teórico de la digital.

Para terminar este artículo queremos mencionar una prueba de chequeo simple para la calculadora. Si compramos simultáneamente una CALL y una PUT digital, al vencimiento vamos a ganar el pago acordado en todos los escenarios posibles. Si suponemos que el pago es 1, la suma del valor de la CALL y la PUT digital debe ser el valor presente neto de 1, es decir:

$$\boxed{C + P = e^{-rT}}$$

ANEXO: Deducción de la fórmula

Este Anexo es técnico. Se recomienda al lector estar familiarizado con teoría de probabilidad y procesos estocásticos. Se muestra el proceso paso a paso para obtener la fórmula de una opción PUT binaria. Un libro que recomendamos para estudiar este tema es **Stochastic Calculus for Finance II** de **Steven Shreve**. El procedimiento es similar al que describimos para encontrar la Fórmula de Black-Scholes.

Nos ahorramos algunos pasos iniciales que pueden ser estudiados en dicho documento.

Recordemos que el valor de una PUT en el tiempo t viene dada por la siguiente expresión:

$$P(t) = \widetilde{E}\left[e^{-r(T-t)} P(T) / F_t\right]$$

Sabemos que en el tiempo T una PUT binaria va a tener un "PAGO" definido siempre que el spot esté por debajo del strike. Esto se puede escribir con la función indicadora $I_{\{S(T)<K\}}$

De esta manera el pago de una PUT binaria vendrá dado por la siguiente ecuación

$$P(t) = \widetilde{E}\left[e^{-r(T-t)} PAGO \cdot I_{\{S(T)<K\}} / F_t\right]$$

Como el pago es conocido al inicio al igual que la tasa de interés estas variables pueden salir de la esperanza condicional para obtener

$$P(t) = e^{-r(T-t)} PAGO \cdot \widetilde{E}\left[I_{\{S(T)<K\}} / F_t\right]$$

Y sabemos que la esperanza de una función indicadora es su probabilidad. Por ello tenemos que:

$$P(t) = e^{-r(T-t)} PAGO \cdot \widetilde{P}\left[S(T) < K / F_t\right]$$

Si hacemos t=0 obtendremos el precio de la PUT de la siguiente forma:

$$P(0) = e^{-r(T)} PAGO \cdot \widetilde{P}\left[S(0) < K\right]$$

Recordemos que

$$S(T) = S(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{W}(T)\right]$$

De allí que podamos reescribir el precio de la PUT binaria como:

$$P(0) = e^{-r(T)}PAGO \cdot \tilde{P}\left\{S(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{W}(T)\right] < K\right\}$$

Si despejamos $\tilde{W}(T)$ obtenemos lo siguiente

$$P(0) = e^{-r(T)}PAGO \cdot \tilde{P}\left\{\tilde{W}(T) < \frac{\ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right\}$$

Si dividimos ambos lados por $\sqrt{T}$ y multiplicamos por -1 obtenemos

$$P(0) = e^{-r(T)}PAGO \cdot \tilde{P}\left\{\frac{-\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} > \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}$$

Recordemos que en nuestra definición de la fórmula de Black Scholes habíamos dicho que

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

De allí que

$$P(0) = e^{-r(T)} PAGO \cdot \tilde{P}\left\{\frac{-\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} > d_2\right\}$$

Esto es equivalente a

$$P(0) = e^{-r(T)} PAGO \cdot \tilde{P}\left\{\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}} < -d_2\right\}$$

Como el término $\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}}$ se distribuye normal (0,1) tenemos que el precio de una PUT digital viene dado por:

$$P(0) = e^{-r(T)} PAGO \cdot N(-d_2)$$

Un procedimiento similar se puede seguir para mostrar que el precio de una CALL viene dado por:

$$C(0) = e^{-r(T)} PAGO \cdot N(d_2)$$

Una forma alternativa de representar d_2 es la siguiente:

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F(0)}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Esta última expresión es bastante útil cuando queremos calcular precios de opciones digitales sobre divisas o acciones que pagan dividendos, ya que únicamente debemos obtener el precio forward.