INTERPOLACIÓN DE LA SUPERFICIE DE VOLATILIDADES

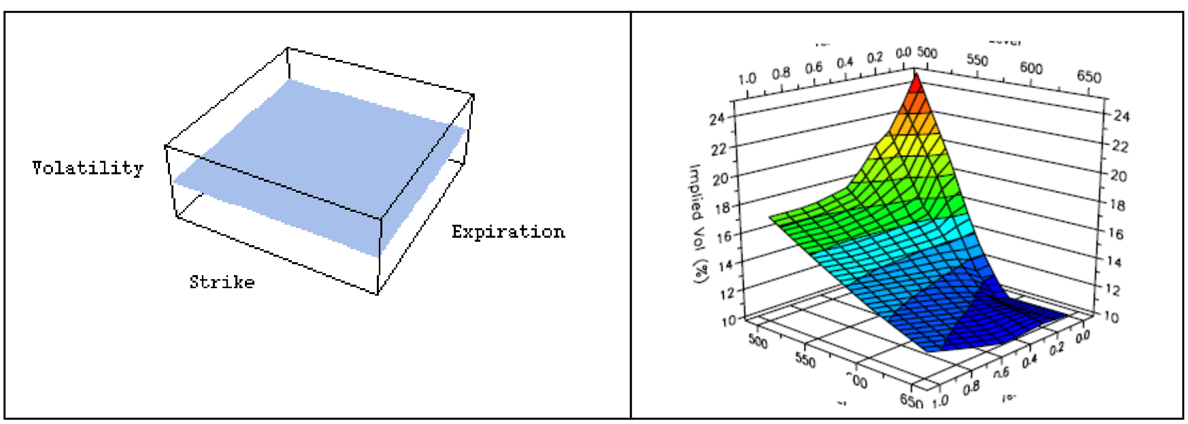
Hemos mencionado en nuestros documentos que la volatilidad implícita es una medida utilizada para comparar opciones con diferentes strikes y vencimientos. De hecho en varios mercados las opciones se cotizan en volatilidad implícita y luego se deducen sus precios usando la fórmula de Black Scholes (BS). Se puede asumir que la volatilidad implícita es una función del plazo al vencimiento y el strike de una opción. A esta relación se le conoce como superficie de volatilidades.

Recordemos que el modelo de BS supone que el activo subyacente sigue un movimiento browniano geométrico del tipo

$$dS(t) = \alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Acá podemos observar que la volatilidad es una constante. Es decir, que independientemente del strike o el plazo al vencimiento, una opción debería tener la misma volatilidad. Esta situación era común antes del crash de 1987. Si uno observa las superficies de volatilidades de diferentes activos se da cuenta que eran relativamente planas. Sin embargo, después de la caída de de las bolsas de aproximadamente el 20% el día lunes 19 de Octubre de 1987, la superficie de volatilidades comenzó a mostrar un comportamiento diferente. Las PUTs con strikes bajos y de vencimientos cortos comenzaron a tener volatilidades implícitas mucho más altas que las de las demás opciones. Estas situaciones se ilustran en la Figura 1.

Figura 1



Fuente: Derman, E. Laughter in the dark: The problem of the volatility smile. 2003

La superficie de volatilidades es una forma de corregir algunos problemas relacionados con el modelo de BS. Para describirlo en términos simples: Es la forma de ingresar unos valores en una fórmula que es incorrecta, para obtener precios de opciones "correctos". Si sabemos que el mercado puede caer un día el 20%, necesariamente las PUTs con strikes bajos deben valer más de lo que el modelo de BS sugiere.

Ahora bien, cuanto deben valer? Una forma de estimarlo es suponer que el activo subyacente sigue un proceso estocástico más parecido a la realidad que el simple movimiento browniano geométrico. Si por ejemplo se tiene un modelo con saltos o volatilidad estocástica se podría obtener una aproximación teórica de dicho precio. Una forma de obtener el precio proveniente de un modelo más sofisticado, conservando el modelo de BS, es cambiando la volatilidad implícita. Esto es lo que en la práctica hace el mercado y por eso surge la superficie de volatilidades. Para conocer con mayor detalle los estándares del mercado de opciones y las superficies de volatilidades le recomendamos tomar nuestro curso **OPCIONES INTERMEDIO**. En este documento nos concentraremos en explicar cómo se puede interpolar la superficie de volatilidades.

En los mercados de opciones se negocian instrumentos con diferentes strikes y vencimientos. Estas opciones tienen volatilidades implícitas observables. Sin embargo estas volatilidades sólo representan un conjunto discreto de puntos. Como obtener entonces el valor de una opción que no está en este conjunto de puntos? Este es un problema común en los mercados de opciones. Por ejemplo si alguien está administrando un libro de opciones OTC va a tener muchas con diferentes strikes y vencimientos. Estas opciones no se cotizan constantemente en el mercado y por consiguiente no podemos observar sus precios explícitamente. Veamos un ejemplo de esta situación en la Figura 2. Allí vemos las cotizaciones en volatilidad implícita de diferentes opciones sobre el EURUSD. En las columnas ATM vemos el BID y el ASK de los Straddles ATM para diferentes plazos. Allí vemos que hay plazos desde 1 día hasta 5 años. Como haríamos para valorar una opción que tiene un plazo al vencimiento de 1.5 meses? Como podemos observar, existen cotizaciones para el plazo de 1 mes y el plazo de 2 meses. Sin embargo no existe ninguna para el plazo de 1.5 meses. Una alternativa que tenemos es usar alguna técnica de interpolación y obtener este valor a partir de las volatilidades implícitas de opciones ATM de 1 y 2 meses.

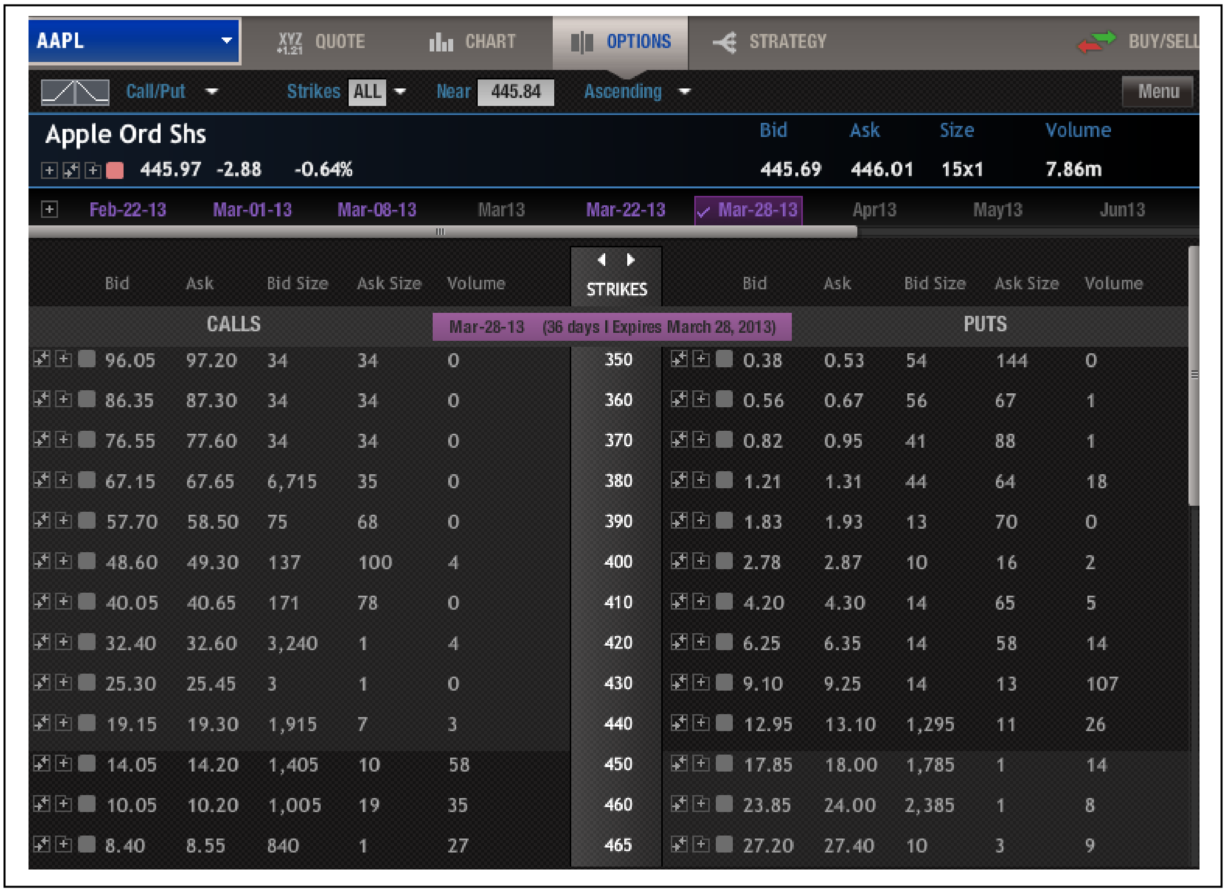
Figura 2

	ATM		25D Call EUR		25D Put EUR		10D Call EUR		10D Put EUR	
Exp	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1D	7.060	10.060	6.708	10.512	7.251	11.049	6.017	13.163	7.721	14.779
1W	8.070	8.880	7.821	8.839	8.396	9.414	7.451	9.301	8.490	10.338
2W	8.065	8.665	7.823	8.577	8.413	9.167	7.511	8.879	8.542	9.908
3W	8.100	8.620	7.882	8.535	8.485	9.138	7.607	8.791	8.714	9.898
1M	8.130	8.470	7.943	8.370	8.560	8.987	7.759	8.533	8.937	9.710
2M	8.160	8.410	7.932	8.246	8.729	9.043	7.821	8.389	9.281	9.849
3M	8.135	8.390	7.831	8.151	8.819	9.139	7.673	8.252	9.488	10.067
6M	8.455	8.705	8.094	8.408	9.387	9.701	8.046	8.614	10.426	10.994
1Y	8.955	9.205	8.527	8.841	9.984	10.298	8.523	9.092	11.318	11.887
18M	9.290	9.590	8.875	9.252	10.328	10.705	8.870	9.552	11.648	12.330
2Y	9.445	9.795	8.997	9.436	10.449	10.888	8.919	9.716	11.665	12.460
3Y	9.755	10.205	9.284	9.849	10.736	11.301	9.168	10.192	11.858	12.882
5Y	10.285	10.775	9.744	10.359	11.276	11.891	9.516	10.631	12.364	13.479

Fuente: Bloomberg

No siempre encontramos explícitamente las volatilidades implícitas. Por ejemplo en los mercados de opciones sobre acciones el estándar es operar en primas y luego a partir de estas primas se obtienen las volatilidades implícitas. En la Figura 3 se muestran primas para diferentes strikes de opciones sobre Apple (APPL). Para conocer como calcular la volatilidad implícita puede consultar nuestros documentos en la sección de **HERRAMIENTAS**.

Figura 3



Bid	Ask	Bid Size	Ask Size	Volume	STRIKES	Bid	Ask	Bid Size	Ask Size	Volume
96.05	97.20	34	34	0	350	0.38	0.53	54	144	0
86.35	87.30	34	34	0	360	0.56	0.67	56	67	1
76.55	77.60	34	34	0	370	0.82	0.95	41	88	1
67.15	67.65	6,715	35	0	380	1.21	1.31	44	64	18
57.70	58.50	75	68	0	390	1.83	1.93	13	70	0
48.60	49.30	137	100	4	400	2.78	2.87	10	16	2
40.05	40.65	171	78	0	410	4.20	4.30	14	65	5
32.40	32.60	3,240	1	4	420	6.25	6.35	14	58	14
25.30	25.45	3	1	0	430	9.10	9.25	14	13	107
19.15	19.30	1,915	7	3	440	12.95	13.10	1,295	11	26
14.05	14.20	1,405	10	58	450	17.85	18.00	1,785	1	14
10.05	10.20	1,005	19	35	460	23.85	24.00	2,385	1	8
8.40	8.55	840	1	27	465	27.20	27.40	10	3	9

Fuente: MonsterTrading

Allí por ejemplo tenemos que las Calls de vencimiento 28 de Marzo de 2013 y strike 460 cotizan a US$ 10.05/10.20. Como ya hemos mencionado, es posible obtener la volatilidad implícita a partir de cada una de las diferentes primas y luego generar un procedimiento de interpolación de estas volatilidades implícitas. Acá sin embargo hay que tener cuidado cuando se trata de opciones americanas ya que el procedimiento para obtener la volatilidad implícita es un poco diferente.

Veamos ahora un ejemplo de cómo interpolar. Trabajemos con los datos de la Figura 1, es decir las volatilidades implícitas para las opciones EURUSD. Allí vemos que para un plazo específico existen 5 cotizaciones de volatilidad para diferentes opciones. Se tienen cotizaciones para CALLs y PUTs de 25% y 10% delta, es decir opciones OTM, y cotizaciones para Straddles ATM. El delta de opciones con este strike es muy cercano al 50%. Por efectos de simplicidad vamos a asumir que es exactamente igual al 50%. Por la paridad PUT/CALL dos opciones europeas con el mismo strike deben cotizar con la misma volatilidad y por ello una opción CALL de 25% delta es equivalente a una opción PUT de 75% de delta. De esta forma para cada plazo tenemos entonces 5 deltas diferentes con 5 volatilidades asociadas. Veamos por ejemplo el plazo de 6 meses. Allí tenemos cotizaciones BID/ASK para los diferentes deltas. Si tomamos las volatilidades en MID market obtenemos los resultados de la Figura 4.

Figura 4

	ATM		25D Call EUR		25D Put EUR		10D Call EUR		10D Put EUR	
Exp	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1D	7.060	10.060	6.708	10.512	7.251	11.049	6.017	13.163	7.721	14.779
1W	8.070	8.880	7.821	8.839	8.396	9.414	7.451	9.301	8.490	10.338
2W	8.065	8.665	7.823	8.577	8.413	9.167	7.511	8.879	8.542	9.908
3W	8.100	8.620	7.882	8.535	8.485	9.138	7.607	8.791	8.714	9.898
1M	8.130	8.470	7.943	8.370	8.560	8.987	7.759	8.533	8.937	9.710
2M	8.160	8.410	7.932	8.246	8.729	9.043	7.821	8.389	9.281	9.849
3M	8.135	8.390	7.831	8.151	8.819	9.139	7.673	8.252	9.488	10.067
6M	8.455	8.705	8.094	8.408	9.387	9.701	8.046	8.614	10.426	10.99
1Y	8.955	9.205	8.527	8.841	9.984	10.298	8.523	9.092	11.318	11.887
18M	9.290	9.590	8.875	9.252	10.328	10.705	8.870	9.552	11.648	12.330
2Y	9.445	9.795	8.997	9.436	10.449	10.888	8.919	9.716	11.665	12.460
3Y	9.755	10.205	9.284	9.849	10.736	11.301	9.168	10.192	11.858	12.882
5Y	10.285	10.775	9.744	10.359	11.276	11.891	9.516	10.631	12.364	13.479

Volatilidades T = 6 meses				
i	Delta_i		Vol_i	
1	D.1	10	v.1	10.71%
2	D.2	25	v.2	9.54%
3	D.3	50	v.3	8.58%
4	D.4	75	v.4	8.25%
5	D.5	90	v.5	8.33%

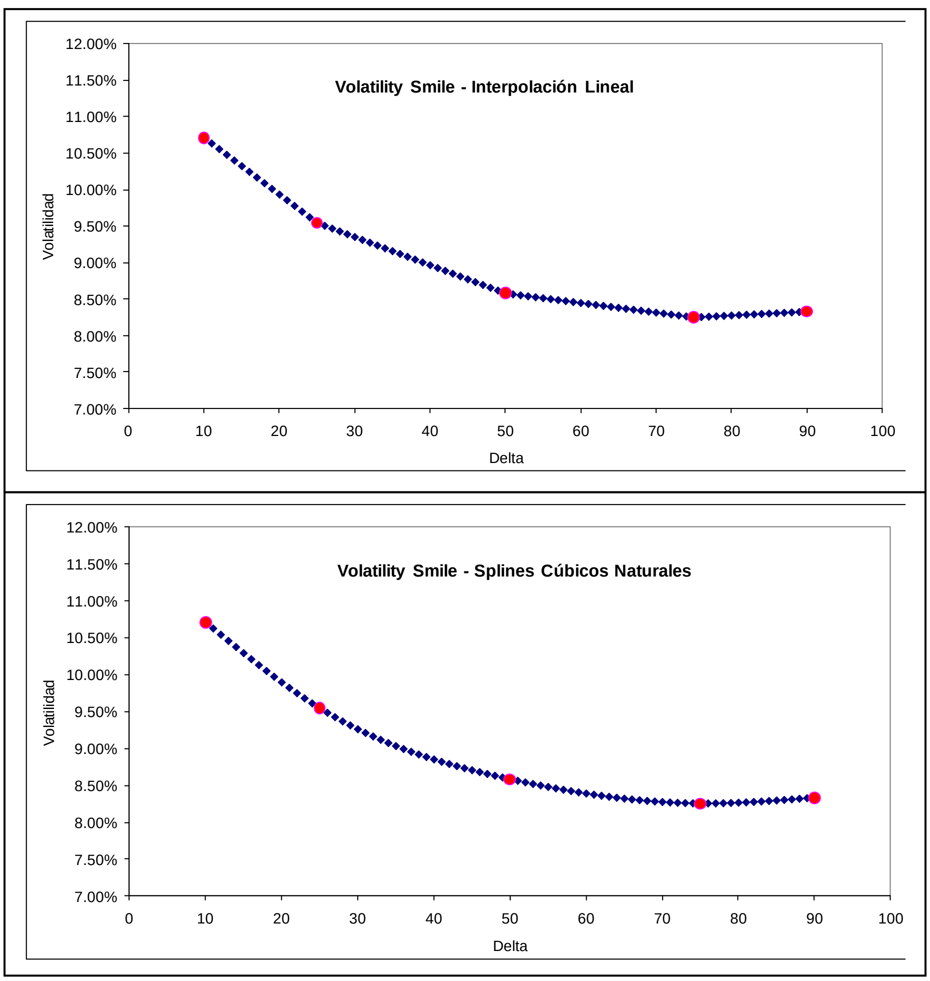
Fuente: Bloomberg y cálculos propios

Con estos datos podemos usar algún método de interpolación para obtener la volatilidad de un delta que no conozcamos. La interpolación lineal es un método sencillo que utiliza la ecuación de una recta para hallar un valor que no conocemos. Si tenemos dos puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1) podemos obtener el valor del punto (x,y) usando la ecuación $y = y_0 + m(x-x_0)$ donde m es la pendiente de la recta $m = (y_1-y_0)/(x_1-x_0)$.

La interpolación usando splines cúbicos naturales hace uso de polinomios de grado 3. Esta interpolación se explica con detalle en el Anexo 1. Igualmente se adjunta un archivo en Excel con ejemplos de estos métodos de interpolación para que ustedes los puedan replicar. Adicionalmente se muestra un ejemplo con una interpolación cúbica denominada Broadlie. Este es un método recomendado, sobre todo cuando se van a hacer análisis de riesgos perturbando los nodos de la curva. La razón es que esta interpolación conserva parcialmente la localidad y conserva el rango, mientras que los splines cúbicos naturales no lo hacen. Esto lo explicamos con un mayor nivel de detalle en nuestro curso **TASAS DE INTERÉS INTERMEDIO**.

En la Figura 5 podemos observar la interpolación de las volatilidades a 6 meses usando interpolación lineal e interpolación cúbica. Vemos que la interpolación cúbica genera una curva mucho más suavizada que la interpolación lineal.

Figura 5



Estos dos métodos son los más utilizados para la interpolación en la dimensión de los strikes o deltas.

Para interpolar en la dimensión del tiempo se recomienda utilizar una interpolación en la varianza total. Si tenemos la volatilidad instantánea del proceso estocástico η la varianza acumulada hasta T viene dada por la integral:

$$V(T) = \int_0^T \eta^2(t)\, dt = T\varsigma^2(T)$$

En este caso ς representa la volatilidad implícita. De allí que llamemos a V(T) la varianza total la cual podemos interpolar para luego obtener la volatilidad implícita. El procedimiento es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \eta^2(t)dt &= \frac{V(T_{i+1}) - V(T_i)}{T_{i+1} - T_i}(T - T_i) + V(T_i) \\
&= \frac{T_{i+1}\varsigma^2(T_{i+1}) - T_i\varsigma^2(T_i)}{T_{i+1} - T_i}(T - T_i) + T_i\varsigma^2(T_i) \\
&= \frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i} T_{i+1}\varsigma^2(T_{i+1}) + \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i} T_i\varsigma^2(T_i)
\end{aligned}$$

$$\varsigma(T) = \sqrt{\frac{T - T_i}{T_{i+1} - T_i}\frac{T_{i+1}}{T}\varsigma^2(T_{i+1}) + \frac{T_{i+1} - T}{T_{i+1} - T_i}\frac{T_i}{T}\varsigma^2(T_i)}.$$

En la Figura 6 podemos observar las volatilidades implícitas para opciones ATM a todos los plazos .

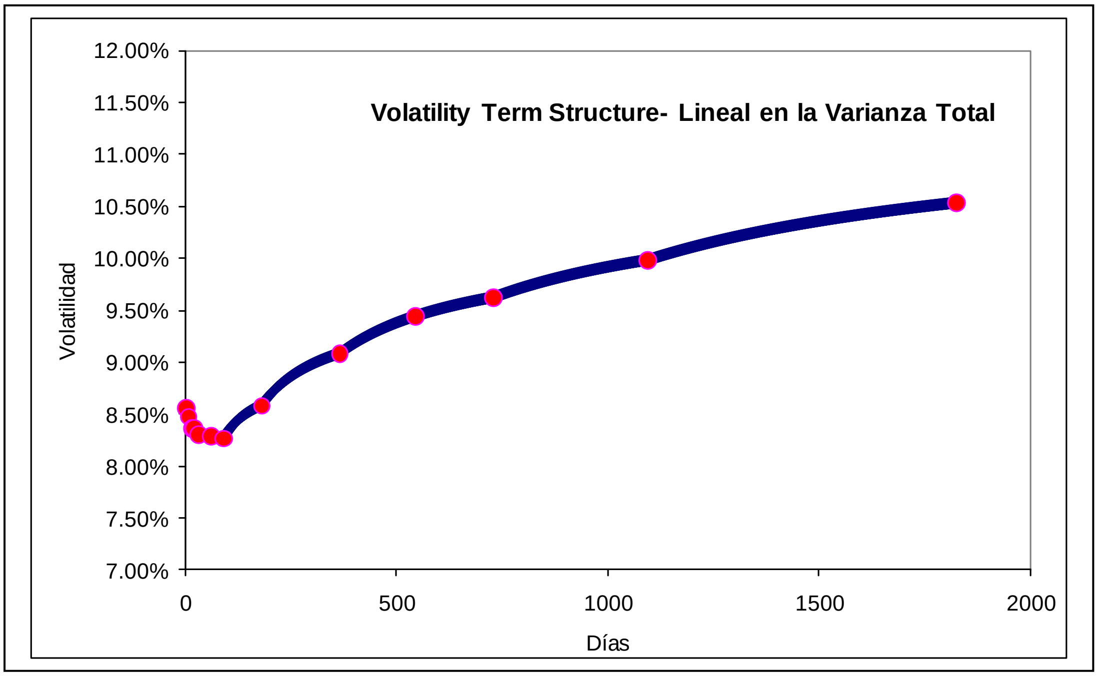
Figura 6

	ATM		25D Call EUR		25D Put EUR		10D Call EUR		10D Put EUR	
Exp	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1D	7.060	10.060	6.708	10.512	7.251	11.049	6.017	13.163	7.721	14.77
1W	8.070	8.880	7.821	8.839	8.396	9.414	7.451	9.301	8.490	10.33
2W	8.065	8.665	7.823	8.577	8.413	9.167	7.511	8.879	8.542	9.90
3W	8.100	8.620	7.882	8.535	8.485	9.138	7.607	8.791	8.714	9.89
1M	8.130	8.470	7.943	8.370	8.560	8.987	7.759	8.533	8.937	9.71
2M	8.160	8.410	7.932	8.246	8.729	9.043	7.821	8.389	9.281	9.84
3M	8.135	8.390	7.831	8.151	8.819	9.139	7.673	8.252	9.488	10.06
6M	8.455	8.705	8.094	8.408	9.387	9.701	8.046	8.614	10.426	10.99
1Y	8.955	9.205	8.527	8.841	9.984	10.298	8.523	9.092	11.318	11.88
18M	9.290	9.590	8.875	9.252	10.328	10.705	8.870	9.552	11.648	12.33
2Y	9.445	9.795	8.997	9.436	10.449	10.888	8.919	9.716	11.665	12.46
3Y	9.755	10.205	9.284	9.849	10.736	11.301	9.168	10.192	11.858	12.88
5Y	10.285	10.775	9.744	10.359	11.274	11.991	9.516	10.631	12.364	13.47

Fuente: Bloomberg

En la Figura 7 vemos las volatilidades usando la interpolación lineal de la varianza total. En el archivo de EXCEL adjunto se muestran los cálculos.

Figura 7



Por último ilustramos el procedimiento para interpolar una opción cuyo strike y plazo al vencimiento no estén dentro de alguno de los pilares. En este caso tenemos que realizar una interpolación en **2 dimensiones**. Supongamos que queremos buscar la volatilidad implícita para una opción sobre el EURUSD con plazo al vencimiento 9 meses (T= 0.75) y strike 1.38. Vemos que los plazos más cercanos para los que existen cotizaciones sobre opciones son 6 meses y 12 meses. Lo primero que debemos hacer es interpolar en la dimensión del tiempo. De esta forma vamos a obtener para el plazo de 9 meses, volatilidades para los pilares de 10, 25, 50, 75 y 90 delta. Esto lo podemos observar en la Figura 8. Por ejemplo tenemos que para los 6 meses ATM la volatilidad es del 8.58% mientras para los 12 meses es del 9.08%. Una interpolación lineal en la varianza total nos da una volatilidad ATM al plazo de 9 meses de 8.92%. De la misma forma obtenemos las volatilidades para los otros pilares de delta.

El siguiente paso es hacer una interpolación en el smile. En el archivo de EXCEL vemos como aplicamos esta interpolación. En este caso usamos los splines Broadley. En este ejemplo necesitamos hallar la volatilidad para el strike 1.3800. Vemos que a ese plazo la volatilidad estaría entre un 50 y un 25 delta CALL (o 75 delta PUT). Lo que hacemos es calcular el delta de la opción usando la fórmula de BS y la volatilidad asociada al delta del 50%. Luego usando la interpolación en la dimensión del delta buscamos la volatilidad que estaría asociada a este delta. Esta sería nuestra primera estimación de la volatilidad de este strike. El procedimiento lo repetimos hasta que la variación en la volatilidad después de iterar sea menor a un nivel de tolerancia determinado ε. Esto se puede observar en la Figura 9.

Figura 8

				SPOT	**1.3300**				
				Tasa Int	**0.25%**				

Volatilidades T = 6 meses

i	Delta		strike_i		p_i		v_i
1	0.1	K.1	1.2128	p.1	0.063401	v.1	10.71%
2	0.25	K.2	1.2762	p.2	0.056307	v.2	9.54%
3	ATM	K.3	1.3325	p.3	0.055763	v.3	8.58%
4	0.25	K.4	1.3883	p.4	0.05115	v.4	8.25%
5	0.1	K.5	1.4394			v.5	8.33%

SPOT	**1.3300**
Tasa Int	**0.40%**

Volatilidades T = 1 año

i	Delta		strike_i		p_i		v_i
1	0.1	K.1	1.1578	p.1	0.094869	v.1	11.60%
2	0.25	K.2	1.2526	p.2	0.081372	v.2	10.14%
3	ATM	K.3	1.3340	p.3	0.085425	v.3	9.08%
4	0.25	K.4	1.4194	p.4	-0.04312	v.4	8.68%
5	0.1	K.5	1.3763			v.5	8.81%

EXAMPLE T=0.75, K = 1.3800	**SPOT**	**1.3300**
	Tasa Int	**0.30%**

Volatilidades T = 9 meses

Delta CALL	Delta OTM		strike_i		p_i		v_i
10	0.1	K.1	1.1815	p.10	15	v.10	11.31%
25	0.25	K.2	1.2626	p.25	25	v.25	9.95%
50	ATM	K.3	1.3330	p.50	25	v.50	8.92%
75	0.25	K.4	1.4049	p.75	15	v.75	8.54%
90	0.1	K.5	1.4713			v.90	8.65%

Figura 9

Interpolación Paso 1	
T=	0.75
K=	1.3800
Delta	63.26
σ	8.6481%

Interpolación Paso 2	
T=	0.75
K=	1.3800
Delta	63.83
σ	8.6389%
Dif Vol	0.0092%

Es importante anotar que este procedimiento de interpolación no asegura que la superficie de volatilidades esté libre de arbitraje. En el ejemplo con el que trabajamos, al tener sólo 5 nodos en la dimensión del delta y al estar estos cotizados directamente como volatilidades implícitas, es poco probable que existan dichas posibilidades de arbitraje. Sin embargo cuando se trabajan con opciones sobre acciones, en los cuales para un plazo específico existen muchas cotizaciones para diferentes strikes, es mucho más probable que ocurra esta situación. Para evitar que la superficie tenga posibilidades de arbitraje se deben imponer ciertas restricciones. Existen diversos documentos que tratan este tema. Un buen resumen de la literatura sobre interpolación de la superficie de volatilidades se encuentra en el documento de **Christian Homescu** llamado **Implied Volatility Surface: Construction, Methodologies and Characteristics**. En general debe asegurarse que no se violen las siguientes relaciones básicas de arbitraje entre opciones:

1. Una CALL con strike K1 no puede valer más que una CALL con strike K2 si K2>K1. Esto implica que $\partial C/\partial CK<0$, o lo que es lo mismo, que las opciones entre más OTM estén deben valer menos en prima.
2. El precio de una CALL debe ser una función convexa del tiempo. Esto impone la condición que el precio de un Butterfly debe ser positivo. Matemáticamente implica que $\partial^2 C/\partial K^2 > 0$
3. Para dos opciones de diferentes plazos y con el mismo grado de moneyness (medido a través del forward delta) el precio de la de mayor plazo debe ser mayor. Esto implica que $\partial C/\partial T>0$ (para el mismo contorno de delta).
4. Condiciones de frontera: Si K tiende a cero el precio de la CALL tiende al valor del spot. Si K tiende a infinito el precio de la CALL tiende a cero.

Hacer la interpolación con estas restricciones es un poco más complejo. Sin embargo lo ilustrado en este documento explica las bases para generar métodos de interpolación. Esperamos que sea de ayuda.

ANEXO 1

Metodología de Interpolación – Splines cúbicos naturales

Supongamos que tenemos una serie de N puntos $t_1 < t_2 < \ldots\ldots < t_N$ y que además conocemos los valores de una función f en dichos puntos $f(t_1) = f_1, f(t_2) = f_2 \ldots\ldots f(t_N) = f_N$

Lo que queremos hacer es aproximar la función f mediante un polinomio de grado 3. Esto lo hacemos por tramos en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

$f(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3$ donde t ϵ $[t_i, t_{i+1}]$

En esta ecuación podemos notar que para cada intervalo tenemos cuatro incógnitas que son a_i, b_i c_i y d_i. Como en total tenemos N-1 intervalos tenemos un total de 4(N-1) incógnitas. Veamos cuantas ecuaciones tenemos para resolver el sistema.

a) Tenemos el valor de la función en cada uno de los puntos t_i. Esto nos da un total de N ecuaciones. Esto lo podemos deducir haciendo $t=t_i$ con lo que obtenemos

$$f(t_i) = a_i + b_i(t_i - t_i) + c_i(t_i - t_i)^2 + d_i(t_i - t_i)^3 \rightarrow f(t_i) = f_i = a_i$$

Acá tenemos N-1 ecuaciones $a_1 = f_1, \cdots\cdots, a_{N-1} = f_{N-1}$

Y la otra ecuación es

$$f_N = f(t_N) = a_{N-1} + b_{N-1}(t_N - t_{N-1}) + c_{N-1}(t_N - t_{N-1})^2 + d_{N-1}(t_N - t_{N-1})^3$$

b) Si imponemos una condición de continuidad en los nodos podemos obtener N-2 ecuaciones. Esto lo podemos deducir haciendo el valor de la función por la derecha igual que el valor de la función por la izquierda. Veamos:

$$a_i + b_i(t_{i+1} - t_i) + c_i(t_{i+1} - t_i)^2 + d_i(t_{i+1} - t_i)^3 = f_{i+1}$$

Por ejemplo para el intervalo $[t_1, t_2]$ tenemos por la izquierda

$$a_1 + b_1(t - t_1) + c_1(t - t_1)^2 + d_1(t - t_1)^3 = f(t)$$

Y por la derecha si t= t2 $f(t) = f_2$. Reemplazamos en la ecuación anterior con lo que obtenemos

$$a_1 + b_1(t_2 - t_1) + c_1(t_2 - t_1)^2 + d_1(t_2 - t_1)^3 = f_2$$

En total allí obtenemos N-2 ecuaciones, ya que la última ecuación que obtendríamos en este procedimiento estaría repetida con la última ecuación del literal a.

c) Si exigimos que la primera derivada de la función sea continua obtenemos otras N-2 ecuaciones. Esto lo podemos deducir haciendo el valor de la primera derivada de la función por la derecha igual que el valor por la izquierda. Veamos:

$$b_i + 2c_i(t_{i+1} - t_i) + 3d_i(t_{i+1} - t_i)^2 = b_{i+1}$$

Por ejemplo para el intervalo [t_1,t_2] tenemos por la izquierda

$$b_1 + 2c_1(t_2 - t_1) + 3d_1(t_2 - t_1)^2 = f'(t)$$

Y por la derecha si t= t2 $b_2 + 2c_1(t_2 - t_2) + 3d_1(t_2 - t_2)^2 = f'(t) = b_2$

Con lo que obtenemos

$$b_1 + 2c_1(t_2 - t_1) + 3d_1(t_2 - t_1)^2 = b_2$$

En total obtenemos N-2 ecuaciones con esta condición.

d) Si exigimos que la segunda derivada de la función sea continua obtenemos otras N-2 ecuaciones. Esto lo hacemos de manera similar al literal c.

$$2c_i + 6d_i(t_{i+1} - t_i) = 2c_{i+1}$$

Con las condiciones de los literales a), b) c) y d) obtenemos un total de N+3(N-2) = 4N – 6 ecuaciones. Sabemos que tenemos un total de 4(N-1) = 4N – 4 incógnitas, por lo que necesitamos obtener otras dos ecuaciones. Hay diferentes formas de hacerlo. Una muy popular es imponer condiciones sobre los valores de la segunda derivada de la función en los extremos, es decir en t_1 y t_N. Los splines cúbicos naturales hacen que la segunda derivada valga cero en estos puntos para obtener las otras dos ecuaciones. Esto es:

$$c_1 = 0$$

$$2c_{N-1} + 6d_{N-1}(t_N - t_{N-1}) = 0$$

Con estas ecuaciones el sistema está completo y lo podemos solucionar.