La fórmula de Black – Caps y Floors

Tal y como los explicamos en nuestro documento "La fórmula de Black", es posible valorar instrumentos que se basan en la existencia de una tasa de interés estocástica usando una fórmula sencilla similar a "La fórmula de Black-Scholes".

Esta es la segunda de 3 herramientas que publicamos para valorar algunas opciones sobre tasas de interés. En este documento vamos a mostrar la fórmula para valorar Caps y Floors. Recordemos que un CAP puede ser visto como un conjunto de opciones sobre tasa de interés. La opción paga el máximo entre: a) la diferencia de la tasa de interés en un período futuro y un strike específico y b) cero. Si por ejemplo un CAP tiene un vencimiento dentro de 5 años y una periodicidad trimestral, tendremos en total 20 opciones (4 por año). Cada una de estas opciones se denomina CAPLET y puede ser valorada independientemente. La suma del valor de todos los CAPLETS nos dará el valor del CAP. Por lo tanto nos bastará con deducir el valor de cada CAPLET.

El perfil de pago al vencimiento de cada CAPLET viene dado por la expresión:

$$N \cdot \tau(T_{i-1}, T_i) \cdot MAX\left(L(T_{i-1}, T_i) - L_K, 0\right)$$

Allí se puede ver como un CAPLET es equivalente a una CALL sobre la tasa de interés. L_k representa el strike, por lo que el comprador de la opción se beneficiará de subidas en la tasa de interés por encima de este nivel. Cada una de estas opciones puede ser valorada con la fórmula de Black. Esto debido a que la tasa de interés que va a darse entre el período T_{i-1} y T_i, denominada $L(T_{i-1}, T_i)$, es una martingala bajo la medida de probabilidad T. Esto lo explicamos con detalle en el Anexo 1 de este documento. Por ahora nos bastará conocer que la fórmula para valorar cada CAPLET cuando t=0 viene dada por la siguiente expresión:

$$CAPLET(T_i) = N \cdot \tau(T_{i-1}, T_i) \cdot P(0, T_i)\left[F(0, T_{i-1}, T_i) \cdot N(d_1) - L_K \cdot N(d_2)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(0, T_{i-1}, T_i)}{L_K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) T_i}{\sigma\sqrt{T_i}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_i}$$

donde:

$F(0,T_{i-1},T_i)$: Tasa de interés forward entre T_{i-1} y T_i L_K:Strike

$P(0,T_i)$:Bono cero cupón con vencimiento T_i

T_i: Tiempo al vencimiento del CAPLET

σ: Volatilidad N(x): Distribución de probabilidad normal acumulada.

El valor del CAP vendrá entonces dado por:

$$CAP(T_N) = \sum_{i=1}^{N} CAPLET(T_i)$$

Para realizar la valoración de un CAP debemos entonces seguir los siguientes pasos:

1. **Obtener una curva cero cupón:** Esta curva la necesitamos por dos motivos. El primero es para descontar los flujos de caja que obtenemos en cada período de tiempo. El segundo es que a partir de la curva cero cupón podemos obtener las tasas forward para los diferentes períodos. Recordemos que la tasa forward entre los tiempos T_{i-1} y T_i se puede obtener a partir de los bonos cero cupón de estos plazos. A continuación ilustramos la tasa forward compuesta de manera simple.

$$F(t,T_{i-1},T_i) = \left[\frac{1}{P(t,T_{i-1},T_i)} - 1\right] \cdot \frac{1}{\tau(T_{i-1},T_i)} = \left[\frac{P(t,T_{i-1})}{P(t,T_i)} - 1\right] \cdot \frac{1}{\tau(T_{i-1},T_i)}$$

   La curva cero cupón se obtiene a partir de la información de diferentes instrumentos del mercado, usualmente swaps de tasas de interés. Puede consultar nuestro documento "Interpolación Curva de Tasas de Interés" para conocer cómo se puede obtener una curva cero cupón a partir de instrumentos que pagan cupones periódicos.

2. **Obtener las volatilidades para las diferentes CAPLETs:** En general el mercado tendrá una volatilidad implícita que podemos ingresar en la fórmula. En la práctica hay dos enfoques que se pueden utilizar. Podemos obtener una volatilidad diferente para cada CAP o podemos tener una volatilidad diferente para cada CAPLET. Si hay una volatilidad diferente para cada CAP a este conjunto de volatilidades se le denomina "Volatilidades FLAT". Ahora, si utilizamos una volatilidad diferente para cada CAPLET las llamaremos "Volatilidades SPOT". Es algo similar a lo que ocurre con las TIRES de los

bonos y la deducción de las tasas cero cupón o "SPOT". El estándar del mercado es cotizar las volatilidades flat. A partir de estas se pueden obtener las volatilidades para cada CAPLET usando un procedimiento similar al Bootstrapping. En la Figura 1 se puede observar como se cotizan las volatilidades FLAT para CAPs con diferentes vencimientos y strikes.

Si no tenemos acceso a volatilidades implícitas podemos calcular la volatilidad histórica de las tasas de interés para tener una idea de que valor de volatilidad podemos esperar hacia el futuro. En nuestro documento "Opciones sobre bonos – F Black" ilustramos como se puede calcular la volatilidad histórica para el rendimiento al vencimiento de un bono

3. Una vez tenemos la curva cero cupón y las volatilidades implícitas podemos valorar las opciones ya que el resto de la información como el strike, el plazo al vencimiento o la periodicidad están definidas en el contrato.

Figura 1

ICAP USD CAP/FLOORS IMPL VOLS 66) MSG a contribuidor 11:11:49
ICAP Zoom 100%
ICAP Directorio de opciones de tipo de interés (VOLS) -> Monitor actual (GDCO 5562 1)

Plazo:	Strike Levels: 1.50	2.00	2.50	3.00	4.00	5.00
1) 1 Year	107.11	116.09	123.72	129.05	122.65	114.39
2) 2 Year	77.34	77.57	77.86	78.32	77.38	75.95
3) 3 Year	65.99	63.71	61.79	60.50	58.77	57.80
4) 4 Year	59.47	55.14	51.36	49.45	46.20	44.24
5) 5 Year	54.39	49.65	45.82	43.45	39.88	37.67
6) 6 Year	50.77	45.95	42.17	39.66	35.79	33.58
7) 7 Year	47.83	43.09	39.44	36.94	33.16	30.92
8) 8 Year	45.49	40.88	37.35	34.89	31.22	29.01
9) 9 Year	43.89	39.32	35.86	33.39	29.74	27.52
10) 10 Year	42.85	38.24	34.76	32.25	28.55	26.29
11) 12 Year	40.71	36.19	32.80	30.31	26.64	24.34
12) 15 Year	38.05	33.78	30.60	28.24	24.80	22.58
13) 20 Year	35.34	31.36	28.42	26.22	22.97	20.83

Fuente: Bloomberg

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos encontrar el valor de un CAP con vencimiento en 5 años que hace revisiones trimestrales de la tasa de interés. Esto quiere decir que tenemos un total de 20 CAPLETs por valorar. Vamos a tener la tasa LIBOR en USD como referencia. El strike de esta opción es 1.630170% y vamos a usar una volatilidad FLAT de 52.52%

En la Figura 2 ilustramos la valoración de esta CAP. En este caso tenemos la curva cero cupón ya calculada, expresada en término de factores de descuento. Como lo mencionamos anteriormente, estos nos sirven para calcular las tasas forward y para descontar los flujos de caja del futuro. Allí podemos obtener el valor de cada CAPLET con la información que tenemos del contrato. Vemos que el valor total de la CAP es 3.6032% utilizando como fecha de valoración el 16 de diciembre de 2013. Adjuntamos un archivo de EXCEL junto con este documento en donde se pueden observar detalladamente los cálculos.

Figura 2

Fecha Valor	12/16/2013	**Base τ**	360
Nocional	10,000,000	**Base T**	365

FLUJO	Comienza int	Fecha pago	FD	Cap Strike	FWD Rate	Flat Vol	Dias	T	d1	d2	N(d1)	N(d2)	Valor
1	12/16/2013	3/17/2014	0.999387			52.52%	91	0.25					0
2	03/17/2014	06/16/2014	0.998738	1.630170%	0.2571%	52.52%	91	0.50	(4.80)	(5.17)	0.00	0.00	0.00
3	06/16/2014	09/16/2014	0.998018	1.630170%	0.2854%	52.52%	92	0.75	(3.60)	(4.06)	0.00	0.00	0.12
4	09/16/2014	12/16/2014	0.997222	1.630170%	0.3123%	52.52%	91	1.00	(2.88)	(3.41)	0.00	0.00	2.07
5	12/16/2014	03/16/2015	0.996332	1.630170%	0.3534%	52.52%	90	1.25	(2.31)	(2.90)	0.01	0.00	15.29
6	03/16/2015	06/16/2015	0.995205	1.630170%	0.4530%	52.52%	92	1.50	(1.67)	(2.31)	0.05	0.01	117.11
7	06/16/2015	09/16/2015	0.993755	1.630170%	0.5710%	52.52%	92	1.75	(1.16)	(1.86)	0.12	0.03	467.16
8	09/16/2015	12/16/2015	0.991893	1.630170%	0.7346%	52.52%	91	2.00	(0.70)	(1.44)	0.24	0.07	1,409.47
9	12/16/2015	03/16/2016	0.989484	1.630170%	0.9631%	52.52%	91	2.25	(0.27)	(1.06)	0.39	0.14	3,565.11
10	03/16/2016	06/16/2016	0.986383	1.630170%	1.2437%	52.52%	92	2.50	0.09	(0.74)	0.54	0.23	7,370.59
11	06/16/2016	09/16/2016	0.982634	1.630170%	1.4929%	52.52%	92	2.75	0.33	(0.54)	0.63	0.30	11,553.78
12	09/16/2016	12/16/2016	0.978268	1.630170%	1.7464%	52.52%	91	3.00	0.53	(0.38)	0.70	0.35	16,126.51
13	12/16/2016	03/16/2017	0.973087	1.630170%	2.1063%	52.52%	90	3.25	0.74	(0.20)	0.77	0.42	22,891.99
14	03/16/2017	06/16/2017	0.967288	1.630170%	2.3980%	52.52%	92	3.50	0.88	(0.10)	0.81	0.46	29,550.06
15	06/16/2017	09/18/2017	0.960882	1.630170%	2.6087%	52.52%	94	3.76	0.97	(0.05)	0.83	0.48	34,922.75
16	09/18/2017	12/18/2017	0.954237	1.630170%	2.6669%	52.52%	91	4.01	0.99	(0.06)	0.84	0.48	35,269.92
17	12/18/2017	03/16/2018	0.947229	1.630170%	2.9268%	52.52%	88	4.25	1.08	(0.00)	0.86	0.50	39,444.01
18	03/16/2018	06/18/2018	0.939317	1.630170%	3.4458%	52.52%	94	4.51	1.23	0.11	0.89	0.55	53,450.89
19	06/18/2018	09/17/2018	0.931261	1.630170%	3.3130%	52.52%	91	4.76	1.19	0.05	0.88	0.52	48,992.45
20	09/17/2018	12/17/2018	0.922839	1.630170%	3.6104%	52.52%	91	5.01	1.26	0.09	0.90	0.54	55,173.88
													3.6032%

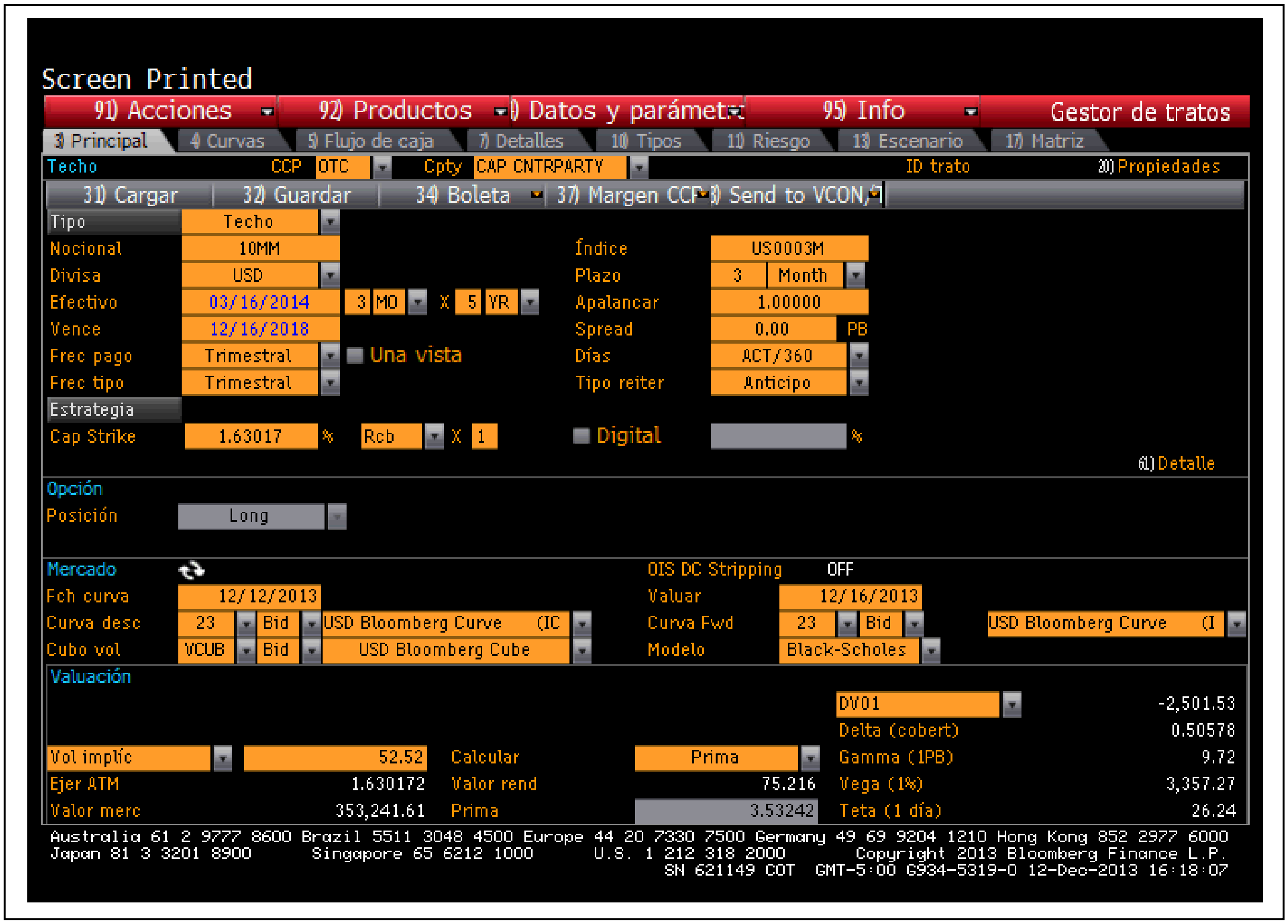
En la Figura 3 podemos observar el cálculo obtenido por medio de Bloomberg. Allí vemos que el valor de la CAP es 3.53242% que es un valor alrededor de 1% inferior. Las diferencias pueden darse debido al conteo de días o la forma de calcular la distribución normal. Sin embargo vemos que obtenemos valores bastante similares. Para valorar un FLOOR se sigue un procedimiento bastante similar. En este caso el perfil de pagos de cada FLOORLET viene dado por:

$$N \cdot \tau(T_{i-1}, T_i) \cdot MAX\left(L_K - L(T_{i-1}, T_i), 0\right)$$

lo cual se puede entender como una PUT sobre una tasa de interés. La fórmula de BLACK aplica igualmente sólo que ahora para el caso de una PUT.

Quant Trading
www.quant-trading.co

Figura 3



Fuente: Bloomberg

Referencias

- HULL, J. (2006). Futures, Options and Other derivatives.

ANEXO 1

A continuación mostraremos porque la tasa compuesta de manera simple que se da en el futuro es una martingala bajo la medida de probabilidad T. Recordemos que esta medida de probabilidad usa el bono cero cupón como activo numerario. Este concepto lo explicamos con detalle en el ANEXO 2 de nuestro documento "La Fórmula de Black".

Para comenzar notemos que la tasa de interés compuesta de manera simple que va a darse entre el tiempo T_{i-1} y T_i puede reexpresarse de la siguiente forma:

$$L(T_{i-1},T_i)=F(T_{i-1},T_{i-1},T_i)$$

De allí que:

$$E^{T_i}\left[L(T_{i-1},T_i)/F_t\right]=E^{T_i}\left[F(T_{i-1},T_{i-1},T_i)/F_t\right]$$

Recordemos que la tasa forward que se puede observar desde t, para darse entre el tiempo T_{i-1} y T_i viene dada por la expresión:

$$F(t,T_{i-1},T_i)=\left[\frac{1}{P(t,T_{i-1},T_i)}-1\right]\cdot\frac{1}{\tau(T_{i-1},T_i)}=\left[\frac{P(t,T_{i-1})}{P(t,T_i)}-1\right]\cdot\frac{1}{\tau(T_{i-1},T_i)}$$

Allí podemos observar que el denominador contiene el bono cero cupón con vencimiento T_i. Por ello esta tasa es una martingala bajo la medida de probabilidad T_i y puede escribirse como:

$$E^{T_i}\left[F(T_{i-1},T_{i-1},T_i)/F_t\right]=F(t,T_{i-1},T_i)$$

De esta manera podemos usar la fórmula de Black para valorar tanto CAPLETs como FLOORLETs simplemente usando la tasa $F(t,T_{i-1},T_i)$ como el precio forward.