

## La fórmula de Black – Opciones sobre bonos

Tal y como los explicamos en nuestro documento [“La fórmula de Black”](#), es posible valorar instrumentos que se basan en la existencia de una tasa de interés estocástica usando una fórmula sencilla similar a [“La fórmula de Black-Scholes”](#).

Esta es la primera de 3 herramientas que vamos a publicar para valorar algunas opciones sobre tasas de interés. En este documento vamos a mostrar la fórmula para valorar opciones sobre bonos. La fórmula de Black es bastante utilizada para este tipo de opciones al igual que para los CAPS, FLOOR y SWAPTIONS y en general se conoce como el modelo estándar de mercado (Standard Market Model). Es importante anotar que el desarrollo de esta fórmula tiene un rigor teórico importante y en ningún caso constituye una aproximación como se sugiere en algunos libros. En los Anexos de la herramienta [“La fórmula de Black”](#), se describe la deducción teórica de la fórmula. En el caso de opciones sobre bonos la fórmula aplica también para valorar bonos con opciones implícitas como los denominados bonos “callable” o “putable”. En un bono callable el emisor tiene el derecho de recomprar la emisión a un precio específico en el futuro. En el bono putable el comprador del bono tiene el derecho de vendérselo de nuevo al emisor a un precio determinado.

Recordemos que la versión general de la fórmula para el caso de una opción CALL viene dada por la ecuación 1:

$$(1) C = P(0,T)[F \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

donde:

F: Forward

K: Strike,

P(0,T): Bono cero cupón con vencimiento T

T: Tiempo al vencimiento de la opción

$\sigma$ : Volatilidad    N(x): Distribución de probabilidad normal acumulada.

Hay algunas particularidades que debemos tener en cuenta en el momento de utilizar esta fórmula en opciones sobre bonos. A continuación mencionamos los más relevantes:

- a) Es importante anotar que el forward de un bono con cupones debe ser calculado retirando los cupones que se encuentran entre la fecha de valoración y la fecha del cumplimiento del forward.

La fórmula del forward viene dada entonces por

$$For(t,T) = \frac{S(t) - VP(I)}{P(t,T)}$$

En este caso  $S(t)$  es el precio del bono en el mercado spot,  $VP(I)$  es el valor presente de los intereses y  $P(t,T)$  es el precio del bono cero cupón.

- b) Debe definirse bien la convención para calcular el precio futuro del bono y el strike. Allí se debe mirar si se utiliza el precio sucio o el precio limpio, es decir si se acumulan o no los intereses parciales del último cupón.
- c) Al vencimiento el valor de un bono tiende a par. Esto hace que la volatilidad de su precio tienda a cero debido a que no existe incertidumbre asociada al valor del mismo. Por ello la convención en el mercado es utilizar la volatilidad del rendimiento del bono y convertirla luego a la volatilidad del precio. Veamos cómo podemos hacer esto:

Supongamos que el rendimiento de un bono  $Y(t)$  sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dY(t) = \mu_Y Y(t)dt + \sigma_Y Y(t)dW$$

Allí  $\sigma_Y$  es la volatilidad del rendimiento.

Sabemos adicionalmente que el cambio porcentual en el precio de un bono debido al cambio en su rendimiento puede ser aproximado mediante la duración modificada (DM). Esto se puede expresar de la siguiente manera

$$\frac{dB(t)}{B(t)} \approx DM \cdot dY(t) \rightarrow dB(t) = B(t) \cdot DM \cdot dY(t)$$

$$\rightarrow dB(t) = B(t) \cdot DM \cdot [\mu_Y Y(t)dt + \sigma_Y Y(t)dW] = (\bullet) + B(t) \cdot DM \cdot \sigma_Y Y(t)dW$$

De esta forma si hacemos  $\sigma_B = DM \cdot \sigma_Y Y(t)$  podemos obtener la volatilidad en el precio del Bono a partir de la volatilidad de su rendimiento al vencimiento, su duración modificada y su rendimiento al vencimiento.

Estas variables que estamos calculando son las del forward del bono. Cuando existe un mercado de opciones líquido la volatilidad del rendimiento se cotiza en el mercado. Si este no existe lo usual es que se utilice alguna medida de volatilidad histórica. En nuestro curso de [OPCIONES INTERMEDIO](#) explicamos con detalle como calcular esta cantidad.

Utilizar la fórmula de Black para valorar opciones sobre bonos es relativamente sencillo. Sólo debemos ingresar algunos parámetros y obtendremos el valor de la opción inmediatamente. En este documento queremos ilustrar como obtener los parámetros a partir de la información del mercado. Vamos a obtener el precio de una opción CALL Europea con vencimiento en 2 años sobre un bono de la República de Colombia. Los bonos emitidos por este gobierno se denominan TES y paga un cupón fijo cada año. Para nuestro ejemplo escogimos una de las referencias líquidas que tiene vencimiento en el año 2024. El strike lo definimos en 130.

Recordemos que los parámetros que necesitamos ingresar en la fórmula de Black son los siguientes:

F, K=130, P(0,2), T=2,  $\sigma$

Por ahora sólo tenemos 2 de los 5 parámetros que necesitamos. Vamos a ilustrar como podemos obtener los 3 valores restantes.

#### a) Obtención del precio forward.

Recordemos que el precio forward viene dado por la expresión

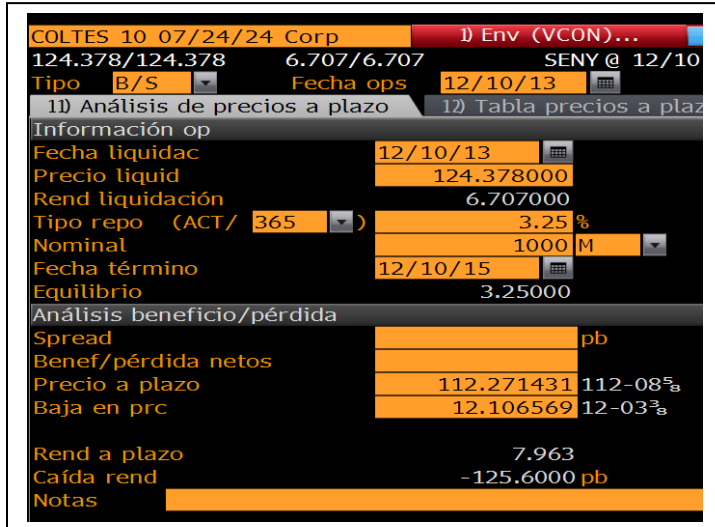
$$For(t,T) = \frac{S(t) - VP(I)}{P(t,T)}$$

Esto quiere decir que al precio spot del bono le debemos restar el valor presente de los cupones que existan entre hoy y la fecha de 2 años. La fecha de hoy es 10/12/2013 y la fecha de 2 años es 10/12/2015. El bono vence el día 24/07/2024 por lo tanto pagará cupones todos los 24 de Julio. De esta manera debemos sustraer el valor presente de los cupones que se pagan el 24/07/14 y 24/07/15.

Algo adicional que debemos considerar es que entre el 24/07/15 y el 10/12/2015 hay 139 días en los cuales se están acumulando intereses. Este valor también debe removerse en el cálculo del precio forward. Únicamente nos falta saber cuál es el precio limpio del bono y cuál es la tasa repo con la que podemos calcular el bono cero cupón a 2 años. En la Figura 1 podemos observar que el precio limpio del

bono es 124.378 y la tasa repo a 2 años es 3.25%. Esta información la tomamos de Bloomberg. Con ella podemos calcular el precio forward del bono que en este caso es 112.271431

Figura 1



Información op	
Fecha liquidac	12/10/13
Precio liquid	124.378000
Rend liquidación	6.707000
Tipo repo (ACT/365)	3.25%
Nominal	1000 M
Fecha término	12/10/15
Equilibrio	3.25000
Análisis beneficio/pérdida	
Spread	
Benef/pérdida netos	
Precio a plazo	112.271431 112-08 <sup>5</sup> / <sub>8</sub>
Baja en prc	12.106569 12-03 <sup>3</sup> / <sub>8</sub>
Rend a plazo	7.963
Caída rend	-125.6000 pb
Notas	

Fuente: Bloomberg

Realizamos estos cálculos en EXCEL y obtuvimos el mismo resultado. Esto se puede observar en la Figura 2 y en el archivo de EXCEL que adjuntamos.

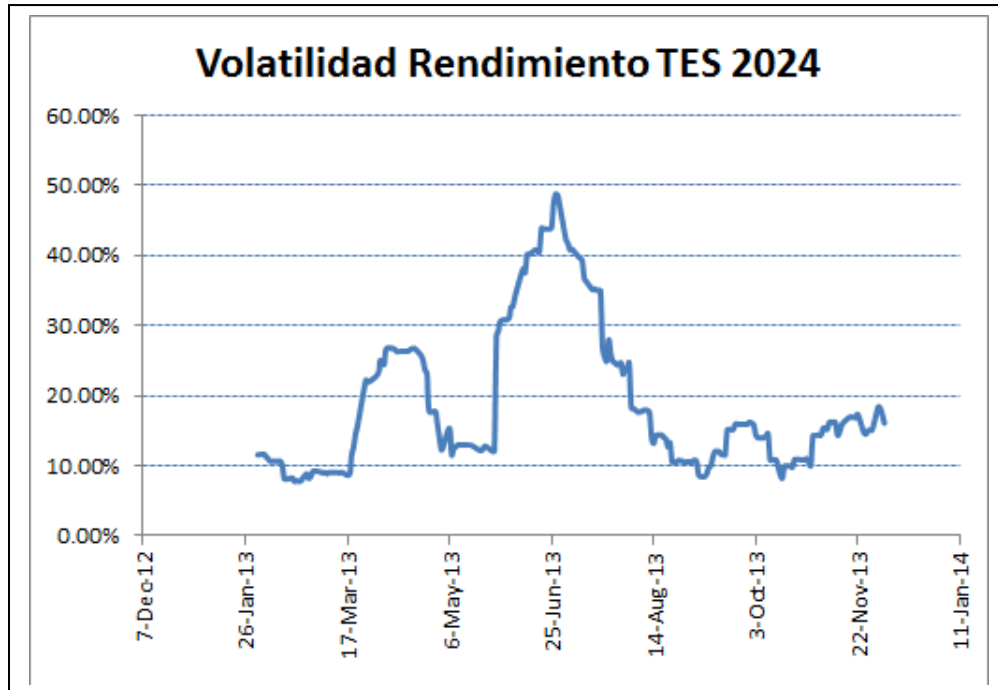
Figura 2

Nominal	100.000		
Cupón	10.00%		
P limpio	124.378		
Fecha Ult Cupón	7/24/2013		
Int acumulados	3.81		
P sucio	128.186		
FECHA	T	CF	VPN
7/24/2014	0.619	10.000	9.8039
7/24/2015	1.619	10.000	9.4953
VPN int acum	3.57		
Fecha Val	12/10/2013		
Fecha FWD	12/10/2015		
Tasa Repo	3.25%		
P(0,2)	0.9380		
P Limpio FWD	<b>112.2714</b>		

## b) Obtención de la volatilidad del precio

Si tuviéramos un mercado de opciones líquido podríamos obtener la volatilidad de cotizaciones de opciones. Sin embargo, como el mercado aún no es líquido para opciones sobre bonos de la República de Colombia, podemos utilizar la volatilidad histórica. En la Figura 3 podemos observar la volatilidad del rendimiento de los bonos con vencimiento en el 2024 durante el último año.

**Figura 3**



Fuente: Bancolombia

Podemos observar que la volatilidad ha cambiado bastante durante este período con mínimos por debajo del 10% y máximos cercanos al 50%. Pareciera que el 20% es un nivel promedio en la muestra y por razones de simplicidad lo vamos a utilizar en este ejemplo. Cómo pasar entonces de una volatilidad del rendimiento del 20% a una volatilidad del precio forward del bono?

Recordemos que tenemos la fórmula  $\sigma_B = DM \cdot \sigma_Y Y(t)$

Debemos entonces encontrar entonces el rendimiento al vencimiento del forward del bono  $Y(t)$  y su duración modificada. El rendimiento al vencimiento podemos encontrarlo a partir del precio forward que tenemos y los flujos de caja del bono. Hay que tener cuidado pues debemos sumar los intereses acumulados entre el 24/07/2015 y el 10/12/2015 al precio forward del bono para calcular su rendimiento. Acá debemos hacer uso de la función “buscar objetivo” en EXCEL.

La duración modificada se calcula con la fórmula tradicional. En nuestro curso de [DERIVADOS DE TASAS DE INTERÉS INTERMEDIO](#) explicamos con detalle el cálculo de esta cantidad. En la Figura 4 podemos observar los resultados. Allí vemos que el rendimiento del forward del bono es 7.96% y su duración modificada es 5.87. Utilizando estos datos obtenemos una volatilidad del forward del bono de 9.33%. Esta cifra la podemos utilizar en la fórmula de Black para calcular el precio de la opción. En el archivo de EXCEL adjunto se muestran con detalle los cálculos.

Figura 4

FWD Yield	7.96%			
P Sucio FWD	116.08			
FECHA	T	CF	VPN	VPN*T
7/24/2016	0.622	10.000	9.535110591	5.930055
7/24/2017	1.622	10.000	8.832486305	14.32557
7/24/2018	2.622	10.000	8.181637076	21.45158
7/24/2019	3.622	10.000	7.578747697	27.4496
7/24/2020	4.625	10.000	7.018812025	32.4596
7/24/2021	5.625	10.000	6.501609027	36.56932
7/24/2022	6.625	10.000	6.02251774	39.89712
7/24/2023	7.625	10.000	5.578729786	42.5359
7/24/2024	8.627	110.000	56.83216146	490.3136
			116.08	710.93
Dur	6.33			
Dur M	5.87			
Vol Rend	20.00%			
Vol Precio	9.33%			

Si utilizamos una tasa repo de 3.25% a 2 años nuestro bono cero cupón a este plazo sería  $P(0,2) = 0.9380$ . Con estos datos podemos calcular el valor de la opción. En la Figura 5 podemos observar que el valor de la opción es \$ 1.0022

Figura 5

FORWARD	112.2714	d1	-1.0452
STRIKE	130.00	N(d1)	0.1480
VOL REND	20.000%	N(-d1)	0.8520
VOL PRECIC	9.330%	d2	-1.1771
TASA REPO	3.250%	N(d2)	0.1196
P(0,T)	0.9380	N(-d2)	0.8804
NUMERO DE	730		
TIEMPO VC	2.00	call	\$ 1.0022
		put	\$ 17.6322

Podemos verificar este valor con los datos de Bloomberg. En la Figura 6 podemos observar que el precio de la opción es 0.9812, es decir que tenemos aproximadamente 2 centavos de diferencia. Vemos que la volatilidad que calcula Bloomberg es de 9.309% en lugar de 9.33%. Esta diferencia es muy pequeña y se debe probablemente a ligeras discrepancias en la forma de calcular la duración modificada. Por otra parte la tasa repo que usa Bloomberg es 3.985% en lugar de 3.25%. Si cambiamos estos dos valores obtenemos casi el mismo resultado que Bloomberg. Esto se puede apreciar en la Figura 7.

Figura 6.

Subyacente	COLTES 10 07/24/24 Corp	EH765203 Corp	Oper	12/10/2013
Precio sub	Ask	124.378	COP Yield	6.707
Resultados				
Precio (tot)	9.81	Divisa	COP	Rend Vega
Prc (unidad)	0.9812	Delta (%)	14.16	Precio Vega
Prc (%)	0.7889	Gamma (%)	1.9398	Teta
				Rho
				1.67
				3.60
				0.00
				0.00
				Vlr tiempo
				Duración mod
				Convexidad
				DV01
Vainilla europea ... Leg 1				
Estilo	Vanilla	Forward	Carry	112.271400
Ejercicio	Europeo	COP Tipo	Sem	3.985%
Call/Put	Call	Repo		3.263%
Dirección	Comprar			
Tipo de ejercicio	Price			
Strike	130.000			
Strike	% Money			
	4.52% OTM			
Ejercicio (rend)	5.5220			
Posición	1.00			
Vence	12/10/2015			
Expiración	729			
	13:30			
Atraso entrega	0			
Modelo	Black			
Vol	Propio			
	9.309%			
Volatilidad de rendimien	20.000%			

Fuente: Bloomberg

Figura 7

FORWARD	112.2714	d1	-1.0479
STRIKE	130.00	N(d1)	0.1474
VOL REND	20.000%	N(-d1)	0.8526
VOL PRECIO	9.309%	d2	-1.1795
TASA REPO	3.985%	N(d2)	0.1191
P(0,T)	0.9248	N(-d2)	0.8809
NUMERO DE DIAS	730		
TIEMPO VCTO T	2.00	call	\$ 0.9809
		put	\$ 17.3767

## Referencias

- HULL, J. (2006). Futures, Options and Other derivatives.