La fórmula de Black

La fórmula de Black es muy similar a la fórmula de Black-Scholes pero en lugar de utilizar el precio spot del activo subyacente utiliza su precio forward. La fórmula inicialmente fue desarrollada para futuros sobre materias primas pero en los años 80s se empezó a utilizar masivamente para valorar derivados sobre tasas de interés. Estos derivados tienen una complejidad extra y es que tanto el perfil de pagos como la función de descuento utilizan la tasa de interés simultáneamente.

Recordemos que el modelo de Black-Scholes asume una tasa de interés constante. Cómo podemos entonces utilizar una fórmula similar para valorar derivados que se basan en la existencia de una tasa de interés estocástica? La respuesta a esta pregunta radica en la teoría del cambio de medida de probabilidad. Usando este concepto es posible encontrar una fórmula cerrada para valorar productos cuyo perfil de pago depende de una tasa de interés que cambia estocásticamente en el tiempo. Esto lo explicamos con detalle en el Anexo 3. Los Anexos 1 y 2 presentan las bases para entender la deducción de esta fórmula. Estos Anexos están relacionados con la teoría del cambio de medida.

En la ecuación 1 exponemos la versión general la fórmula para el caso de una opción CALL:

(1) $C = P(0,T)\left[F \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)\right]$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde:

F: Forward K:Strike, P(0,T):Bono cero cupón con vencimiento T

T: Tiempo al vencimiento de la opción

σ: Volatilidad N(x): Distribución de probabilidad normal acumulada.

Como se puede observar esta fórmula es bastante similar a la fórmula de BS. Recordemos que el precio de un bono cero cupón P(0,T) puede expresarse de la siguiente manera:

$$P(0,T) = \tilde{E}\left[e^{-\int_0^T r(u)du}\right]$$

En el caso que r fuera constante obtendríamos $P(0,T) = e^{-rT}$ y fácilmente podríamos recobrar la fórmula de Black-Scholes.

Veamos un ejemplo de cómo utilizar esta fórmula de Black.

Supongamos que el forward del activo subyacente a 3 meses vale 101.25, la volatilidad del activo subyacente es el 15% y el precio de un bono cero cupón a 3 meses es 0.9877. Si queremos sacar el valor de una opción CALL con strike de 110 y vencimiento en 3 meses, podemos insertar los siguientes datos en la fórmula:

F = 101.25, K=110, P(0,T)=0.9877, T=0.25, σ=0.15

Notemos que acá no usamos para nada el valor del spot. Ni siquiera necesitamos saber cuánto vale en el mercado.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{101.25}{110}\right) + \left(\frac{0.15^2}{2}\right)0.25}{0.15\sqrt{0.25}} = -1.90 \qquad d_2 = -1.90 - 0.075 = -1.94$$

$$C = 0.9877[101.25N(-1.90) - 110N(-1.94)] = 0.04$$

El valor de la opción según estos parámetros sería 0.04

La fórmula de Black es bastante utilizada en la valoración de opciones de tasas de interés, particularmente en opciones sobre bonos, caps-floors y swaptions. La fórmula es válida para cada producto individualmente pero es inconsistente para valorarlos todos a la vez. Una discusión de este tema se puede encontrar en Hull (2006,p.629).

Adjuntamos un archivo en EXCEL en donde está la ecuación.

Referencias

- HULL, J. (2006). Futures, Options and Other derivatives.
- SHREVE, S. (2004). Stochastic Calculus for Finance II – Continuous time models.

ANEXO 1: Teoría básica de cambio de medida

La teoría de cambio de medida es bastante útil en finanzas matemáticas. Recordemos que el activo "cuenta de ahorros" viene dado por la expresión:

$$M(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$$

El inverso de esta ecuación se define como el factor de descuento:

$$D(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$$

Cuando trabajamos en un mundo neutral al riesgo estamos utilizando la cuenta de ahorros como numerario. Por ello todo activo dividido por la cuenta de ahorros va a ser una martingala bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Trabajemos en este caso con la notación $\widetilde{P}$ para referirnos a la medida de probabilidad neutral al riesgo.

De esta manera, si el precio de un activo viene dado por S(t), tenemos que

$$\frac{S(t)}{M(t)} = \widetilde{E}\left[\frac{S(T)}{M(T)} / F_t\right]$$

Esta expresión también puede escribirse de la siguiente manera:

$$D(t)S(t) = \widetilde{E}\left[D(T)S(T) / F_t\right]$$

Ahora, en general podemos usar cualquier activo como numerario. En ese caso debemos encontrar una medida de probabilidad equivalente en la cual el activo expresado en las unidades del numerario sea una martingala.

Si definimos un activo N(t) podemos encontrar una medida de probabilidad equivalente a la medida neutral al riesgo usando el teorema de Girsanov. En este caso obtenemos lo siguiente:

$$\widetilde{P}^N(A) = \int_A \frac{M(0)}{M(T)} \cdot \frac{N(T)}{N(0)} d\widetilde{P} = \int_A \frac{D(T) \cdot N(T)}{N(0)} d\widetilde{P}$$

Esto ilustra cómo podemos cambiar entre las medidas de probabilidad $\widetilde{P}$ y $\widetilde{P}^N$. Estas dos medidas son equivalentes.

En este caso la cantidad $\frac{D(t)\cdot N(t)}{N(0)}$ actúa como nuestra derivada Radon-Nikodym.

Recordemos que esta cantidad es una martingala bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$. Esto es

$$\frac{D(t)\cdot N(t)}{N(0)} = \widetilde{E}\left[\frac{D(T)\cdot N(T)}{N(T)} / F_t\right]$$

También es importante anotar que satisface las 2 propiedades

a) $\widetilde{E}^N[X] = \widetilde{E}\left[X\,\frac{D(t)\cdot N(t)}{N(0)}\right] = \widetilde{E}\left[X\,\frac{M(0)\cdot N(t)}{M(t)\cdot N(0)}\right]$

b) $\widetilde{E}^N[X / F_s] = \frac{N(0)}{D(s)\cdot N(s)}\widetilde{E}\left[X\,\frac{D(t)\cdot N(t)}{N(0)} / F_s\right] = \frac{1}{D(s)\cdot N(s)}\widetilde{E}[X\cdot D(t)\cdot N(t) / F_s]$

$$= \frac{M(s)}{N(s)}\widetilde{E}\left[X\cdot\frac{N(t)}{M(t)} / F_s\right]$$

Podemos validar rápidamente que el precio de un derivado es el mismo bajo las 2 medidas de probabilidad. Para empezar miremos cual es el precio de un derivado bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo. Este viene dado por

$$\text{Precio}(t, X, \widetilde{P}) = M(t)\widetilde{E}\left[\frac{X}{M(T)} / F_t\right]$$

Utilizando las propiedades anteriores podemos llegar al precio bajo la medida de probabilidad $\tilde{P}^N$. Veamos

$$\text{Precio}\left(t, X, \tilde{P}\right) = M(t)\tilde{E}\left[\frac{X}{M(T)} / F_t\right] = M(t)\tilde{E}\left[\frac{X}{M(T)} \cdot \frac{N(T)}{N(T)} / F_t\right] = M(t) \cdot \frac{N(t)}{N(t)}\tilde{E}\left[\frac{X}{M(T)} \cdot \frac{N(T)}{N(T)} / F_t\right]$$

$$= N(t) \cdot \frac{M(t)}{N(t)}\tilde{E}\left[\frac{N(T)}{M(T)} \cdot \frac{X}{N(T)} / F_t\right]$$

$$= N(t)\tilde{E}^N\left[\frac{X}{N(T)} / F_t\right] = \text{Precio}\left(t, X, \tilde{P}^N\right)$$

Allí se puede observar como los precios bajo las dos medidas de probabilidad son equivalentes.

ANEXO 2: La medida de probabilidad forward

Recordemos que el precio de un forward viene dado por la expresión:

$$For(t,T) = \frac{S(t)}{P(t,T)}$$

En este caso la cantidad P(t,T) es el bono cero cupón con vencimiento en T. En un mundo neutral al riesgo el precio de un bono cero cupón viene dado por la expresión:

$$\frac{P(t,T)}{M(t)} = \tilde{E}\left[\frac{P(T,T)}{M(T)} / F_t\right] = \tilde{E}\left[\frac{1}{M(T)} / F_t\right]$$

Esto debido a que el precio de un bono cero cupón al vencimiento es 1 por lo cual P(T,T) = 1.

Dado que un bono cero cupón es un activo operable en el mercado este puede ser utilizado como activo numerario. De allí que podamos usar la teoría desarrollada en el Anexo 1 para cambiar la medida de probabilidad. Esta medida llamaremos medida de probabilidad forward y utilizaremos la notación T para referirnos a ella.

$$\tilde{P}^T(A) = \int_A \frac{M(0)}{M(T)} \cdot \frac{P(T,T)}{P(0,T)} d\tilde{P} = \int_A \frac{M(0)}{M(T)} \cdot \frac{1}{P(0,T)} d\tilde{P} = \frac{1}{P(0,T)} \int_A D(T) \cdot d\tilde{P}$$

La medida de probabilidad T puede ser útil en algunas ocasiones. Veamos un ejemplo: Supongamos que queremos obtener el precio de un derivado cuyo perfil de pago al vencimiento viene dado por V(T). Bajo la medida probabilidad neutral al riesgo, el precio viene dado por:

$$\frac{V(t)}{M(t)} = \tilde{E}\left[\frac{V(T)}{M(T)} / F_t\right] \rightarrow V(t) = M(t)\tilde{E}\left[\frac{V(T)}{M(T)} / F_t\right]$$

Si V(t) y M(t) son dependientes, se tendría que evaluar la función de probabilidad conjunta para encontrar el valor de la esperanza condicional. Esto puede ser bastante problemático en algunas ocasiones. Sin embargo esto se puede simplificar bastante utilizando un cambio de medida.

Utilizando la teoría descrita en el Anexo 1 podemos expresar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$V(t) = M(t)\widetilde{E}\left[\frac{V(T)}{M(T)} / F_t\right] = M(t)\frac{P(t,T)}{P(t,T)}\widetilde{E}\left[\frac{V(T)}{M(T)}\frac{P(T,T)}{P(T,T)} / F_t\right] = P(t,T)\frac{M(t)}{P(t,T)}\widetilde{E}\left[V(T)\frac{P(T,T)}{M(T)} / F_t\right]$$

$$= P(t,T)\widetilde{E}^T\left[V(T) / F_t\right]$$

En caso de existir una dependencia entre V(t) y M(t) el precio puede obtenerse de una manera mucho más sencilla bajo la medida de probabilidad T. Esto debido a que sólo hay que encontrar la esperanza condicional de V(T) para hallar el precio del derivado.

Por último es importante anotar que cualquier activo descontado que use como numerario el bono cero cupón va a ser una martingala bajo la medida de probabilidad T. Esto implica que su diferencial estocástico únicamente tendrá un término browniano. En el caso del forward, como su expresión es equivalente a descontar el activo spot por el bono cero cupón, tenemos que es una martingala bajo la medida de probabilidad T. De allí que su diferencial estocástico venga dado por:

$$dFor(t,T) = \sigma For(t,T)d\widetilde{W}^T$$ (suponemos que su volatilidad es constante por simplicidad)

Es fácil demostrar que la solución de esta ecuación diferencial estocástica está dada por:

$$For(t,T) = For(0,T)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}^T(t)\right) = \frac{S(0)}{P(0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\widetilde{W}^T(t)\right)$$

Ahora veamos la ecuación diferencial estocástica y su solución para el inverso del forward. Esto lo hacemos debido a que lo vamos a necesitar en el Anexo 3 en la deducción de la fórmula de Black.

Aplicando el Lema de Ito tenemos que:

$$d\left[\frac{1}{For(t,T)}\right] = -\frac{1}{For(t,T)^2}\sigma For(t,T)d\widetilde{W}^T + \frac{1}{2}\frac{2}{For(t,T)^3}\sigma^2 For(t,T)^2 dt$$

$$d\left[\frac{1}{For(t,T)}\right] = -\frac{\sigma}{For(t,T)^2}d\tilde{W}^T + \frac{\sigma^2}{For(t,T)}dt = -\frac{\sigma}{For(t,T)^2}\left[d\tilde{W}^T - \sigma dt\right]$$

Recordemos que $For(t,T) = \frac{S(t)}{P(t,T)}$ y este es una martingala bajo la medida de probabilidad T.

Por lo tanto $\frac{1}{For(t,T)} = \frac{P(t,T)}{S(t)}$ es una martingala bajo la medida de probabilidad que utiliza el activo spot S(t) como numerario. A esta medida de probabilidad la llamaremos la medida spot $\tilde{P}^S$

Esto implica que $d\tilde{W}^T - \sigma dt = d\tilde{W}^S$ para que la ecuación diferencial estocástica tenga únicamente un término Browniano. Por lo tanto podemos escribir

$$d\left[\frac{1}{For(t,T)}\right] = -\frac{\sigma}{For(t,T)^2}d\tilde{W}^S$$

Es fácil demostrar que la solución de esta ecuación diferencial estocástica está dada por:

$$\frac{1}{For(t,T)} = \frac{1}{For(0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma\tilde{W}^S(t)\right) = \frac{P(0,T)}{S(0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma\tilde{W}^S(t)\right)$$

ANEXO 3: Deducción de la fórmula de Black

Vamos a calcular el precio de una opción CALL de una manera similar a como lo explicamos en nuestro documento "La Fórmula de BS". En este caso por cuestiones de simplicidad vamos a trabajar en el tiempo t=0. De allí que tengamos

$$V(0) = \frac{1}{D(0)}\tilde{E}\left[(S(T)-K)^{+} D(T)/F_0\right] = \tilde{E}\left[(S(T)-K)^{+} D(T)\right]$$

$$= \tilde{E}\left[I_{\{S(T)>K\}} S(T) D(T)\right] - K \cdot \tilde{E}\left[I_{\{S(T)>K\}} D(T)\right]$$

Recordemos que

$$(S(T)-K)^{+} = MAX\left[S(T)-K,0\right]$$

y que $I_{\{X\}}$ es la función indicadora

Utilizando la teoría de cambio de medida podemos escribir

$$V(0) = S(0)\tilde{E}\left[I_{\{S(T)>K\}} \frac{D(T)S(T)}{S(0)}\right] - K \cdot P(0,T) \cdot \tilde{E}\left[I_{\{S(T)>K\}} \frac{D(T)P(T,T)}{P(0,T)}\right]$$

Y recordemos de la teoría del cambio de medida descrita en el Anexo 1 que

$$\tilde{E}^{N}[X] = \tilde{E}\left[X \frac{D(t) \cdot N(t)}{N(0)}\right]$$

De allí que

$$V(0) = S(0)\tilde{E}^{S}\left[I_{\{S(T)>K\}}\right] - K \cdot P(0,T) \cdot \tilde{E}^{T}\left[I_{\{S(T)>K\}}\right]$$

Debido a que la esperanza de una función indicadora es igual a la probabilidad del evento que contiene tenemos que

$$V(0) = S(0)\tilde{P}^S\left[S(T) > K\right] - K \cdot P(0,T) \cdot \tilde{P}^T\left[S(T) > K\right]$$

Como al vencimiento el precio forward y el spot convergen podemos escribir S(T) = For(T,T) y de allí

$$V(0) = S(0)\tilde{P}^S\left[For(T,T) > K\right] - K \cdot P(0,T) \cdot \tilde{P}^T\left[For(T,T) > K\right]$$

$$V(0) = S(0)\tilde{P}^S\left[\frac{1}{For(T,T)} < \frac{1}{K}\right] - K \cdot P(0,T) \cdot \tilde{P}^T\left[For(T,T) > K\right]$$

Recordemos que tenemos las soluciones para For(t,T) y 1/For(t,T)

$$For(t,T) = \frac{S(0)}{P(0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma\tilde{W}^T(t)\right)$$

$$\frac{1}{For(t,T)} = \frac{P(0,T)}{S(0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t - \sigma\tilde{W}^S(t)\right)$$

Aplicando este resultado para For(T,T) y 1/For(T,T) obtenemos

$$V(0) = S(0)\tilde{P}^S\left[\frac{P(0,T)}{S(0)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T - \sigma\tilde{W}^S(T)\right) < \frac{1}{K}\right] - K \cdot B(0,T) \cdot \tilde{P}^T\left[\frac{S(0)}{P(0,T)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\tilde{W}^T(T)\right) > K\right]$$

$$V(0)=S(0)\tilde{P}^{S}\left[-\sigma\tilde{W}^{S}(T)<\ln\left(\frac{S(0)}{K\cdot P(0,T)}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}T\right]-K\cdot B(0,T)\cdot\tilde{P}^{T}\left[\sigma\tilde{W}^{T}(T)>\ln\left(\frac{K\cdot P(0,T)}{S(0)}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}T\right]$$

$$V(0)=S(0)\tilde{P}^{S}\left[-\frac{\tilde{W}^{S}(T)}{\sqrt{T}}<\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K\cdot P(0,T)}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right]-K\cdot B(0,T)\cdot\tilde{P}^{T}\left[-\frac{\tilde{W}^{T}(T)}{\sqrt{T}}<\frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K\cdot P(0,T)}\right)-\frac{1}{2}\sigma^{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

$$V(0)=S(0)\tilde{P}^{S}\left[-\frac{\tilde{W}^{S}(T)}{\sqrt{T}}<\frac{\ln\left(\frac{For(0,T)}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right]-K\cdot B(0,T)\cdot\tilde{P}^{T}\left[-\frac{\tilde{W}^{T}(T)}{\sqrt{T}}<\frac{\ln\left(\frac{For(0,T)}{K}\right)-\frac{1}{2}\sigma^{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right]$$

Recordemos que $-\frac{\tilde{W}(T)}{\sqrt{T}}\sim N(0,1)$

Si definimos $d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left\{\ln\left(\frac{For(0,T)}{K}\right)+\frac{1}{2}\sigma^{2}T\right\}$ podemos escribir

$$V(0)=S(0)\cdot N(d_1)-K\cdot P(0,T)\cdot N(d_1)$$

$$V(0)=P(0,T)[For(0,T)\cdot N(d_1)-K\cdot N(d_2)]$$

Esta es la fórmula de Black.