La fórmula de Black Scholes (BS)

Esta fórmula, que fue desarrollada en los años setenta, revolucionó el mercado de opciones. Los traders empezaron a utilizarla masivamente debido a que sólo necesitaban ingresar algunos parámetros observables en el mercado (a excepción de la volatilidad) y podían obtener un precio para cualquier opción europea. El desarrollo de esta fórmula, en conjunto con el inicio de la operación de la bolsa de Chicago generó un crecimiento exponencial del mercado de opciones.

La primera fórmula que se desarrolló fue la de una CALL Europea sobre una acción que no paga dividendos. La fórmula viene dada por la ecuación (1) donde C es el precio de la CALL. En el Anexo 1 se muestra el desarrollo matemático para obtener la fórmula en el caso de la PUT europea. Un procedimiento similar se usa para obtener la fórmula de la CALL. Si está familiarizado con la teoría de procesos estocásticos es un buen ejercicio.

(1) $C = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Donde:

S: Spot K:Strike, r:Tasa interés T: Tiempo al vencimiento de la opción

σ: Volatilidad N(x): Distribución de probabilidad normal acumulada.

Como mencionamos anteriormente, todas estas variables son observables a excepción de la volatilidad (esto cuando no existe un mercado de opciones). Sin embargo esta última variable se puede estimar a partir de la historia de los movimientos del activo subyacente. Luego esta estimación se puede usar como un proxy para insertar en la fórmula. Veamos un ejemplo.

Supongamos que el activo subyacente vale 100, la tasa de interés es 5% y la volatilidad del activo subyacente es el 15%. Si queremos sacar el valor de una opción CALL con strike de 110 y vencimiento en 3 meses, podemos insertar los siguientes datos en la fórmula:

S = 100, K=110, r=0.05, T=0.25, σ=0.15

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{100}{110}\right) + \left(0.05 + \frac{0.15^2}{2}\right)0.25}{0.15\sqrt{0.25}} = -1.06 \qquad d_2 = 0.1088 - 0.075 = -1.14$$

$$C = 100N(-1.06) - 110e^{-0.05*0.25}N(-1.14) = 0.5317$$

El valor de la opción según estos parámetros sería 0.5317.

Esta fórmula fue bastante revolucionaria en su momento. Con el paso del tiempo se ha ganado un entendimiento mucho mayor de los mercados financieros y se han puesto al descubierto muchos problemas de la misma. Sin embargo quedó tan arraigada en la forma de operar de los agentes del mercado que hoy en día sigue siendo un estándar en la industria. De hecho el concepto de volatilidad implícita está íntimamente ligado a esta fórmula. En nuestro documento sobre volatilidad implícita, en nuestra sección de **HERRAMIENTAS**, discutimos con mayor detalle este concepto y su método de cálculo.

Adjuntamos adicionalmente un archivo en Python en donde está el código de la fórmula. Este archivo es útil para obtener el precio de CALLS y PUTS con diferentes características. En la Figura 1 podemos observar el valor de una opción CALL con los parámetros que discutíamos anteriormente. Vemos que el precio es 0.531785…. . Este código adicionalmente calcula el delta y el vega de la opción. Estos temas los discutimos con un gran detalle en nuestro **CURSO DE OPCIONES INTERMEDIO**.

Figura 1

```
>>> bsformula('call',100,110,0.05,0.25,0.15)
(0.53178592881252129, 0.14306817959019952, 11.293514029002313)
```

ANEXO 1: Deducción de la fórmula

Este Anexo es técnico. Se recomienda al lector estar familiarizado con teoría de probabilidad y procesos estocásticos. Se muestra el proceso paso a paso para obtener la fórmula de una opción PUT. Un libro que recomendamos para estudiar este tema es **Stochastic Calculus for Finance II** de **Steven Shreve**.

Supongamos que tenemos una tasa de interés constante r y un activo riesgoso S_1. La dinámica del factor de descuento y del activo vienen dadas por las ecuaciones a continuación:

$$dD(t) = -rD(t)dt \quad , \quad dS_1(t) = \alpha S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW(t)$$

De esta manera la dinámica del activo subyacente descontado (dinámica del valor presente del activo) viene dada por:

$$d[D(t)S_1(t)] = D(t)S_1(t)[(\alpha - r)dt + \sigma dW(t)]$$

$$d[D(t)S_1(t)] = \sigma D(t)S_1(t)\left[\frac{(\alpha - r)}{\sigma}dt + dW(t)\right]$$

Notemos que estas dinámicas están bajo la medida de probabilidad P (mundo real) .

Si definimos un nuevo movimiento browniano bajo la medida de probailidad $\widetilde{P}$ (mundo neutral al riesgo) del tipo

$$d\widetilde{W}(t) = \frac{(\alpha - r)}{\sigma}dt + dW(t)$$

podemos usar el teorema de Girnasov para obtener

$$d[D(t)S_1(t)] = \sigma D(t)S_1(t)d\widetilde{W}(t)$$

Vemos que $D(t)S_1(t)$ es una martingala bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$.

Si tenemos un portafolio X(t) que replica el perfil de pagos de una opción PUT, sabemos que al vencimiento tenemos X(T) = P(T). Si asumimos que el portafolio es autofinanciado se puede demostrar que:

$$d[D(t)X(t)] = \Delta_1(t)d[D(t)S_1(t)]$$

$$d[D(t)X(t)] = \Delta_1(t)\sigma D(t)S_1(t)d\widetilde{W}(t)$$

En este caso Δ_1 es la participación del activo riesgoso S_1 dentro del portafolio.

Podemos observar que no tenemos ningún término del tipo dt acá . Por ello el valor del portafolio descontado $D(t)X(t)$ es una martingala bajo la medida de probabilidad $\widetilde{P}$.

Según la definición de martingala, tenemos que:

$$D(t)X(t) = \tilde{E}\left[D(T)P(T)/F_t\right]$$

Y por la ley del único precio podemos afirmar que P(t) = X(t) y P(T) = X(T). De allí que podamos escribir:

$$D(t)P(t) = \tilde{E}\left[D(T)P(T)/F_t\right]$$

De esta forma

$$P(t) = \frac{1}{D(t)}\tilde{E}\left[D(T)X(T)/F_t\right]$$

Y como por definición $D(t) = e^{-rt}$

$$P(t) = \tilde{E}\left[e^{-r(T-t)}P(T)/F_t\right]$$

$$P(t) = \tilde{E}\left[e^{-r(T-t)}\left(K - S_1(T)\right)^{+}/F_t\right]$$

Recordemos que

$$dS_1(t) = \alpha S_1(t)dt + \sigma S_1(t)dW(t)$$

Y además

$$d\tilde{W}(t) = \frac{(\alpha - r)}{\sigma}dt + dW(t)$$

$$dW(t) = -\frac{(\alpha - r)}{\sigma}dt + d\tilde{W}(t)$$

De acá obtenemos la dinámica del activo subyacente bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo

$$dS_1(t) = rS_1(t)dt + \sigma S_1(t)d\tilde{W}(t)$$

La solución de esta ecuación diferencial estocástica viene dada por:

$$S_1(t) = S_1(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\tilde{W}(t)\right]$$

Y si relacionamos estas ecuaciones entre los tiempos T y t obtenemos:

$$\frac{S_1(T)}{S_1(t)} = \frac{S_1(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\tilde{W}(T)\right]}{S_1(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\tilde{W}(t)\right]}$$

$$S_1(T) = S_1(t)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\left(\tilde{W}(T) - \tilde{W}(t)\right)\right]$$

Si definimos

$$\tau = T - t$$

Y también definimos

$$\xi = -\frac{\tilde{W}(T) - \tilde{W}(t)}{\sqrt{\tau}}$$

Podemos reescribir la ecuación de nuestro activo de la siguiente manera:

$$S_1(T) = S_1(t)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\xi\right]$$

Así que la esperanza condicional que queremos calcular viene dada por la siguiente expresión.

$$P(t) = \tilde{E}\left[e^{-r\tau}\left\{K - S_1(t)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\xi\right]\right\}^+ / F_t\right]$$

Pero como ξ es una función de una diferencia de movimientos brownianos, este es independiente de la filtración F_t . Por lo tanto no tenemos que usar la esperanza condicional sino únicamente la esperanza.

$$P(t) = \tilde{E}\left[e^{-r\tau}\left\{K - S_1(t)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\xi\right]\right\}^+\right]$$

Si definimos

$$S_1(t, w) = x$$

$$P(t, x) = e^{-r\tau}x\tilde{E}\left[\left\{\frac{K}{x} - \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\xi\right]\right\}^+\right]$$

Dado que la esperanza se puede representar como una integral tenemos que

$$E[\Psi(\xi)] = \int_R \Psi(y) f_y(y) dy$$

Y como la cantidad

$$\xi = -\frac{\widetilde{W}(T) - \widetilde{W}(t)}{\sqrt{\tau}}$$

tiene una distribución normal podemos escribir

$$P(t,x) = e^{-r\tau} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \left\{ \frac{K}{x} - \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, y\right]\right\}^+ \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy$$

Sabemos que para cualquier variable z, si z < 0 entonces $(z)^+ = 0$.

De allí que solo nos debamos preocupar por los terminos positivos dentro del corchete (esto debido a que la integral de cero es cero). Esto es

$$\frac{K}{x} - \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, y\right] > 0$$

$$\ln\left(\frac{K}{x}\right) > \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, y$$

$$\sigma\sqrt{\tau}\, y > \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \ln\left(\frac{K}{x}\right)$$

$$y > \frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_-$$

En este caso d_- es equivalente a lo que en nuestra ecuación al principio del documento llamamos d_2. De esta forma tenemos que

$$P(t,x) = e^{-r\tau} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_-}^{\infty} \left\{ \frac{K}{x} - \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, y\right]\right\} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy$$

$$P(t,x) = e^{-r\tau} K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_-}^{\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy - e^{-r\tau} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{d_-}^{\infty} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, y \frac{-y^2}{2}\right] dy$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_-}^{\infty}\exp\left[-r\tau+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\sigma\sqrt{\tau}y-\frac{y^2}{2}\right]dy$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_-}^{\infty}\exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\tau-\sigma\sqrt{\tau}y-\frac{y^2}{2}\right]dy$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_-}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\tau+2\sigma\sqrt{\tau}y+y^2\right)\right]dy$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_-}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sigma^2\tau+2\sigma\sqrt{\tau}y+y^2\right)\right]dy$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_-}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(y+\sigma\sqrt{\tau}\right)^2\right]dy$$

Si hacemos un cambio de variable y definimos

$$u=y+\sigma\sqrt{\tau}$$

$$du=dy$$

Así que cuando

$$y=d_-\rightarrow u=d_-+\sigma\sqrt{\tau}=\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}+\sigma\sqrt{\tau}=\frac{\ln\left(\frac{x}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}=d_+$$

$$y=\infty\rightarrow u=\infty$$

De esta manera

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{d_+}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right]du$$

$$P(t,x)=e^{-r\tau}K[1-N(d_-)]-x[1-N(d_+)]$$

$$P(t,x)=Ke^{-r(T-t)}N(-d_-)-xN(-d_+)$$

Esta última ecuación es el precio de una PUT. Un procedimiento muy similar se puede utilizar para obtener el precio de una CALL. O simplemente a partir de este precio y la paridad PUT-CALL podemos obtener el precio de la CALL.