La fórmula de Heston

Esta fórmula proviene de un modelo en donde la volatilidad no es constante sino que también sigue un proceso estocástico. Veamos a continuación las ecuaciones que gobiernan la dinámica del activo subyacente y de la varianza bajo un mundo neutral al riesgo. La forma en que pasamos del mundo real al mundo neutral al riesgo se explica en el ANEXO 1.

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_s(t)$$

$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t)$$

donde $dW_s(t) \cdot dW_v(t) = \rho dt$

El proceso que sigue la varianza es un proceso del tipo raíz cuadrada como lo exponemos en nuestro documento "SIMULACIÓN PROCESO DE CIR". Por su parte el proceso que sigue el spot es un movimiento browniano geométrico generalizado en donde el término de difusión depende del tiempo y es estocástico. Vemos que los procesos de Wiener W_1 y W_2 tienen una correlación ρ. A este término se le conoce como correlación entre el spot y la volatilidad. Por otra parte el término γ se conoce como volatilidad de la volatilidad.

El precio de una opción CALL Europea viene dado por una fórmula relativamente similar a la de "Black-Scholes".

$$C = S \cdot P_1 - e^{-rT} K \cdot P_2$$

Podemos observar que en lugar de las probabilidades del tipo normal $N(d_1)$ o $N(d_2)$ acá tenemos P1 y P2 que pueden entenderse como probabilidades. La deducción de esta ecuación se puede consultar en www.FRouah.com.

Veamos la fórmula para estas probabilidades:

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Integrando_1 \cdot d\phi$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Integrando_2 \cdot d\phi$$

Veamos ahora el Integrando como está definido:

$$Integrando_j = \mathrm{Real}\left(\frac{1}{i\cdot\phi} e^{-i\cdot\phi\cdot\log(K)} \cdot Función\_Característica_j\right)$$ para j = 1,2

En este caso i representa el número imaginario $\sqrt{-1}$ y ϕ es la variable sobre la cual vamos a hacer la integración.

La función característica viene dada por:

$$Función\_Característica_j = \exp\{C + D\cdot v(0) + i\cdot\phi\cdot\log[S(0)]\}$$

donde

$$C = (r_d - r_f)\cdot i\cdot\phi\cdot T + \frac{\kappa\cdot\theta}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\cdot\sigma\cdot\phi\cdot i + d)T - 2\cdot\log\left(\frac{1-ge^{dT}}{1-g}\right)\right]$$

$$D = \frac{b_j - \rho\cdot\sigma\cdot\phi\cdot i + d}{\sigma^2}\left(\frac{1-e^{dT}}{1-g\cdot e^{dT}}\right)$$

$$g = \frac{b_j - \rho\cdot\sigma\cdot\phi\cdot i + d}{b_j - \rho\cdot\sigma\cdot\phi\cdot i - d}$$

$$d=\sqrt{\left(\rho\cdot\sigma\cdot\phi\cdot i-b_j\right)^2-\sigma^2\left(2\cdot u_j\cdot\phi\cdot i-\phi^2\right)}$$

$$u_1=\frac{1}{2},\ u_2=-\frac{1}{2}$$

$$b_1=\kappa-\rho\cdot\sigma,\quad b_2=\kappa$$

En este caso usamos las tasas de interés r_d y r_f. Estas se pueden utilizar para opciones sobre acciones que pagan dividendo o para opciones sobre divisas. En el caso de estas últimas r_d es la tasa de interés doméstica y r_f es la tasa de interés foránea. Si se va a hacer sobre una opción sobre una acción que no paga dividendos debemos dejar $r_f = 0$.

La integral que tenemos se puede calcular numéricamente. En nuestro caso utilizamos la regla del trapecio tal y como se expone en el Anexo 2. Aunque el límite superior de la integral es infinito en la práctica basta tener un número suficientemente grande ya la integral converge rápidamente. En general podemos usar el valor de 100 como límite superior de integración.

Veamos un ejemplo. En nuestro documento "La fórmula de Black-Scholes" valoramos una opción con las siguientes condiciones:

S = 100, K=110, r=0.05, T=0.25, σ=0.15

Vimos que el valor de esta CALL era 0.5317

La fórmula de Heston sería igual a la de Black-Scholes si la volatilidad de la volatilidad fuera 0 al igual que la correlación entre el spot y la volatilidad. Para poder usar la fórmula de Heston debemos poner la media de largo plazo de la varianza κ y la varianza inicial v(0) como el valor de la volatilidad al cuadrado. En nuestro ejemplo esto sería $v(0)=\kappa=0.15^2$. Adjuntamos un archivo de Python en donde se encuentra la implementación de la fórmula.

Podemos ver que el valor de la opción es 0.5318 que es prácticamente igual al que habíamos obtenido con la fórmula de Black-Scholes.

```
>>> quadhestoncall(kappa,theta,sigma,rho,v0,rd,rf,T,s0,K,N,uMin=0.00000001,uMax=100)
0.5317845368576836 8
```

En la fórmula anterior los parámetros UMin, UMax y N corresponden a los límites de integración y el número de intervalos en los que se dividen para realizar la intergración numérica. Esto lo explicamos con mayor detalle en el Anexo 2.

Si cambiamos los parámetros de volatilidad de la volatilidad y correlación entre el spot y la volatilidad obtendríamos valores diferentes para esta opción. Por ejemplo si la volatilidad de la volatilidad es del 20% y la correlación entre el spot y la volatilidad es 50% el precio obtenido sería 0.6614

```
>>> quadhestoncall(kappa,theta,sigma,rho,v0,rd,rf,T,s0,K,N,uMin=0.00000001,uMax=100)
0.66140349025572043
```

Esto es razonable ya que lo que indicaría es que si el spot sube la volatilidad también tendería a subir

debido a la correlación positiva. Por lo tanto las CALLs OTM deberían ser más caras. Por lo tanto si utilizaramos Black-Scholes para valorar esta opción y obtener un precio de 0.6614 deberíamos ingresar una volatilidad más alta. A esto se le conoce como el Smile o Skew de volatilidad. En nuestros Blogs explicamos con detalle este fenómeno.

ANEXO 1

Supongamos que tenemos las siguientes dinámicas para el spot y la varianza de un activo:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_1(t)$$

$$dv(t) = vdt + \gamma\sqrt{v(t)}\left[\rho \cdot dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}\,dW_2(t)\right]$$

$$W(t) = [W_1(t), W_2(t)]$$

W(t) es un MBG estándar en 2 dimensiones.

Estas dinámicas están bajo el mundo real y queremos mirar cuales serían las dinámicas equivalentes bajo un mundo neutral al riesgo. En general la varianza no es un activo operable por lo tanto no es posible eliminar por completo todas las fuentes de incertidumbre $W_1(t)$ y $W_2(t)$. En la actualidad se han introducido algunos instrumentos como los futuros del VIX en donde es posible obtener un proxy de la varianza y operarla. Sin embargo acá solamente vamos a eliminar la incertidumbre asociada al activo subyacente. Esto da como resultado un modelo incompleto pero aún así podemos encontrar una solución.

Si definimos nuestro proceso Radon Nikodym como

$$Z(t) = \exp\left[-\int_0^t \eta(u)^T dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta(u)^T dW(u)\right]$$

entonces bajo la medida de probabilidad, definida como

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(T)dP$$

el proceso

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t \eta(u)du + W(t)$$

es igualmente un movimiento browniano.

Notemos que

$$\eta(t)=[\eta_1(t),\eta_2(t)]$$

de allí que

$$\tilde{W}_1(t)=\int_0^t \eta_1(u)du+W_1(t)$$

$$\tilde{W}_2(t)=\int_0^t \eta_2(u)du+W_1(t)$$

Así entonces la ecuación diferencial estocástica del activo subyacente puede expesarse como

$$dS(t)=\mu S(t)dt+\sqrt{v(t)}S(t)\left[d\tilde{W}_1(t)-\eta_1(t)dt\right]$$

$$\rightarrow dS(t)=\left[\mu-\sqrt{v(t)}\cdot\eta_1(t)\right]S(t)dt+\sqrt{v(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t)$$

Podemos elegir $\mu-\sqrt{v(t)}\cdot\eta_1(t)=r$

Para obtener

$$dS(t)=rS(t)dt+\sqrt{v(t)}S(t)d\tilde{W}_1(t)$$

Esta ecuación muestra que el activo descontado es una martingala bajo la medida de probabilidad $\tilde{P}$. Debido a que sólo tenemos un activo operable podemos escoger $\eta_2(t)$ de infinitas maneras. Una forma particular es la siguiente:

$$\nu-\gamma\sqrt{v(t)}\cdot\rho\cdot\eta_1(t)-\gamma\sqrt{v(t)}\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\eta_2(t)=\kappa[\theta-v(t)]$$

Usando esta ecuación podemos transformar la dinámica de la varianza obteniendo lo siguiente:

$$dv(t)=\nu dt+\gamma\sqrt{v(t)}\cdot\left\{\rho\left[d\tilde{W}_1(t)-\eta_1(t)dt\right]+\sqrt{1-\rho^2}\left[d\tilde{W}_2(t)-\eta_2(t)dt\right]\right\}$$

$$\rightarrow dv(t)=\left[\nu-\gamma\sqrt{v(t)}\cdot\rho\cdot\eta_1(t)-\gamma\sqrt{v(t)}\cdot\sqrt{1-\rho^2}\cdot\eta_2(t)\right]dt+\gamma\sqrt{v(t)}\left[\rho\cdot d\tilde{W}_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\cdot d\tilde{W}_2(t)\right]$$

$$\rightarrow dv(t)=\kappa[\theta-v(t)]dt+\gamma\sqrt{v(t)}\left[\rho\cdot d\tilde{W}_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}\cdot d\tilde{W}_2(t)\right]$$

Así entonces si definimos

$$dW_s(t) = d\widetilde{W}_1(t)$$

$$dW_s(t) = \rho \cdot d\widetilde{W}_1(t) + \sqrt{1-\rho^2} \cdot d\widetilde{W}_2(t)$$

Obtenemos

$$dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{v(t)}S(t)dW_s(t)$$

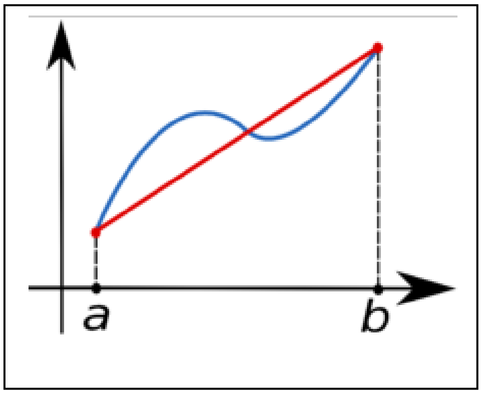
$$dv(t) = \kappa[\theta - v(t)]dt + \gamma\sqrt{v(t)}dW_v(t)$$

ANEXO 2

Supongamos que queremos calcular el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$

Esto básicamente es el área bajo la función f(x) en el intervalo [a,b] como se ilustra en la Figura 1

Figura 1



Esta integral la podemos aproximar calculando el área definida por un trapecio. En este caso la base del trapecio es b-a y tiene 2 alturas. La altura menor es f(a) y la altura de b es f(b). Así entonces el área del trapecio viene dada por:

$$f(a)[b-a]+\frac{f(b)}{2}[b-a]=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Podemos dividir [a.b] en N subintervalos de tamaño $h=\frac{b-a}{N}$

En este caso tendríamos que la aproximación de la integral vendría dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2N}[f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h)+\cdots+f(b)]$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{f(a)}{2}+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+\frac{f(b)}{2}\right]$$