SIMULACIÓN MONTECARLO MBG

El Movimiento Browniano Geométrico es quizás uno de los procesos estocásticos más utilizados en el campo de las finanzas. Este viene descrito por una ecuación diferencial estocástica del tipo.

$$dS(t) = \mu(t, S(t))S(t)dt + \sigma(t, S(t))S(t)dW(t)$$

En este caso $\mu(t, S(t))$ se conoce como la media de largo plazo del proceso y $\sigma(t, S(t))$ como la volatilidad. En el caso más simple podemos hacer estos parámetros constantes es decir tener la ecuación:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Esta ecuación se encuentra en muchos libros de texto para describir el movimiento del precio de algún activo por ejemplo una acción. Cuando trabajamos en un mundo neutral al riesgo podemos llegar a una ecuación como la siguiente:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

La solución fuerte a esta ecuación diferencial estocástica viene dada por:

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$$

En el anexo 1 se muestra como se obtiene este resultado.

Ahora bien, dadas las propiedades del MBG es posible simularlo de una manera exacta en los tiempos $t_0 < t_1 < \ldots.. < t_n$

$$\frac{S(t_1)}{S(t_0)} = \frac{S(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_1 + \sigma W(t_1)\right]}{S(0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_0 + \sigma W(t_0)\right]}$$

Esto implica que

$$S(t_1) = S(t_0)\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1 - t_0) + \sigma\left(W(t_1) - W(t_0)\right)\right]$$

Por la propiedades el MBG sabemos que la diferencia $W(t_1)-W(t_0)$ tiene una distribución normal con media cero y desviación estándar $\sqrt{t_1-t_0}$.

Así entonces, si hacemos X

$$X = -\frac{\tilde{W}(t_1)-\tilde{W}(t_0)}{\sqrt{t_1-t_0}}$$

Podemos reescribir la ecuación como:

$$S(t_1) = S(t_0)\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(t_1-t_0)+\sigma X\sqrt{t_1-t_0}\right]$$

Notemos que X es una variable aleatoria que se distribuye normal (0,1). Si hacemos $\Delta = t_1 - t_0$ podemos reescribir nuestra ecuación de la siguiente forma:

$$S(t_1) = S(t_0)\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\Delta)+\sigma X\sqrt{\Delta}\right]$$

Así entonces lo único que necesitamos para simular el MBG es un valor inicial $S(t_0)$ y un conjunto de variables aleatorias normales. Estas últimas se pueden obtener fácilmente con un generador de números aleatorios.

Con la ecuación anterior podemos hacer una recursión para obtener los valores $S(t_i)$ i = 0,…n haciendo

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\Delta)+\sigma X\sqrt{\Delta}\right]$$

EJEMPLO

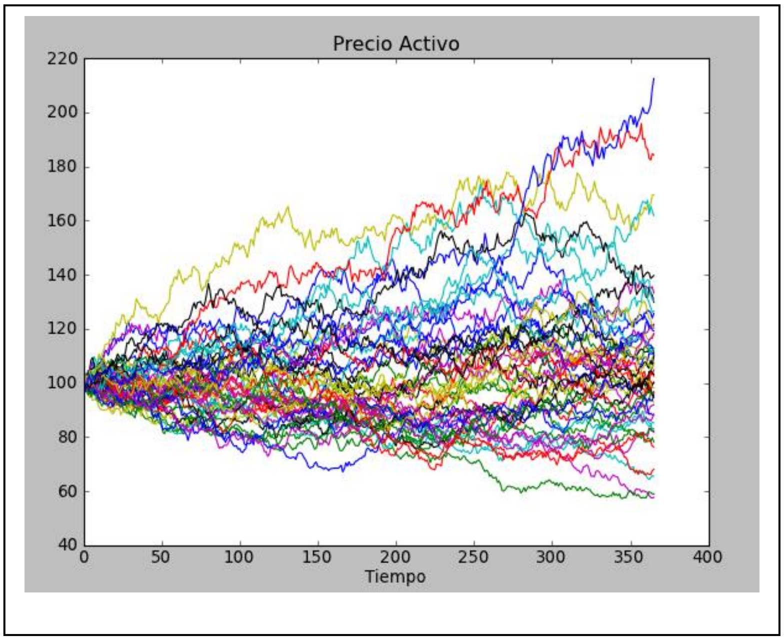
Supongamos que tenemos un activo que el día t = 0 vale 100. Esto es $S(t_0)$ = 100. Adicionalmente supongamos que la tasa de interés es el 10% y la volatilidad es 25%. Si queremos simular la evolución diaria de este activo durante todo un año necesitamos una partición con t_i = 0,…365. Así entonces para encontrar el valor $S(t_1)$ usamos la ecuación:

$$S(t_1) = S(t_0)\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\Delta)+\sigma X\sqrt{\Delta}\right]$$

$$S(t_1) = 100\exp\left[\left(0.1-\frac{0.25^2}{2}\right)\left(\frac{1-0}{365}\right)+0.25X\sqrt{\left(\frac{1-0}{365}\right)}\right]$$

X en este caso en una variable aleatoria normal (0,1). El 99% de las observaciones de esta variable va a ser un número en el intervalo (-3,3). Así entonces una vez generemos una variable aleatoria normal (0,1) obtendremos el valor de $S(t_1)$. Para generar la evolución del activo entre el día 0 y el día 365 necesitamos generar 365 variables aleatorias. Esto nos permitirá simular un posible camino del activo subyacente. Podemos generar tantos caminos como queramos para tener una idea clara de las posibilidades de evolución del precio del activo. Esto se ilustra en la Figura 1.

Figura 1



El **libro Montecarlo Methods in Financial Engineering** de **Paul Glasserman** es una referencia bastante útil para conocer diversos aspectos de la simulación de Montecarlo de diferentes clases de procesos.

ANEXO 1

El MBG viene descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

Podemos integrar esta ecuación usando el Lema de Ito.

Si hacemos el reemplazo de la función

$$f(t,x) = \ln x$$

Entonces la derivadas parciales respecto a t y a x vienen dadas por

$$f_t(t,x) = 0\,,\quad f_x(t,x) = \frac{1}{x}\,,\quad f_{xx}(t,x) = -\frac{1}{x^2}$$

Esto implica que

$$d\left[f(t,S(t))\right] = d\left[\ln S(t)\right] = \frac{1}{S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{S(t)^2}\right)(dS(t))^2$$

$$d\left[\ln S(t)\right] = \frac{1}{S(t)}\left[rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{S(t)^2}\right)\left[\sigma^2 S(t)^2 dt\right]$$

$$d\left[\ln S(t)\right] = rdt + \sigma dW(t) - \frac{\sigma^2}{2}dt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t)$$

Y si integramos ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$\int_0^t d\left[\ln S(u)\right] = \int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)du + \int_0^t +\sigma dW(u)$$

$$\ln\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)$$

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$$

Esta solución es llamada la solución fuerte a la ecuación diferencial estocástica.