SIMULACIÓN MC DE PROCESO CIR

La ecuación diferencial estocástica de un proceso tipo CIR viene dado por:

$$dr(t) = \kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Esta ecuación muestra un proceso de reversión a la media similar al proceso de Vacisek. Sin embargo, a diferencia de este último este proceso tiene una raíz cuadrada en el término de difusión. En la literatura esta ecuación se como “Proceso de difusión de tipo raíz cuadrada”. Si κ y θ son positivos y r(0) es mayor que cero, podemos garantizar que r(t) nunca va a ser negativo. Por otra parte si $2\kappa\theta > \sigma^2$ el proceso r(t) va a ser positivo “casi seguro”.

Aunque esta ecuación diferencial estocástica no tiene una solución explícita es posible encontrar la densidad de transición. La distribución de probabilidad de r(t) dado r(u) con u<t es una distribución chi cuadrada multiplicada por un factor. Esta propiedad puede ser usada para simular el proceso estocástico.

La ley de transición de r(t) viene dada por:

$$r(t) = \frac{\sigma^2\left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right)}{4\kappa} \cdot CHI'^2_d(\lambda)$$

donde

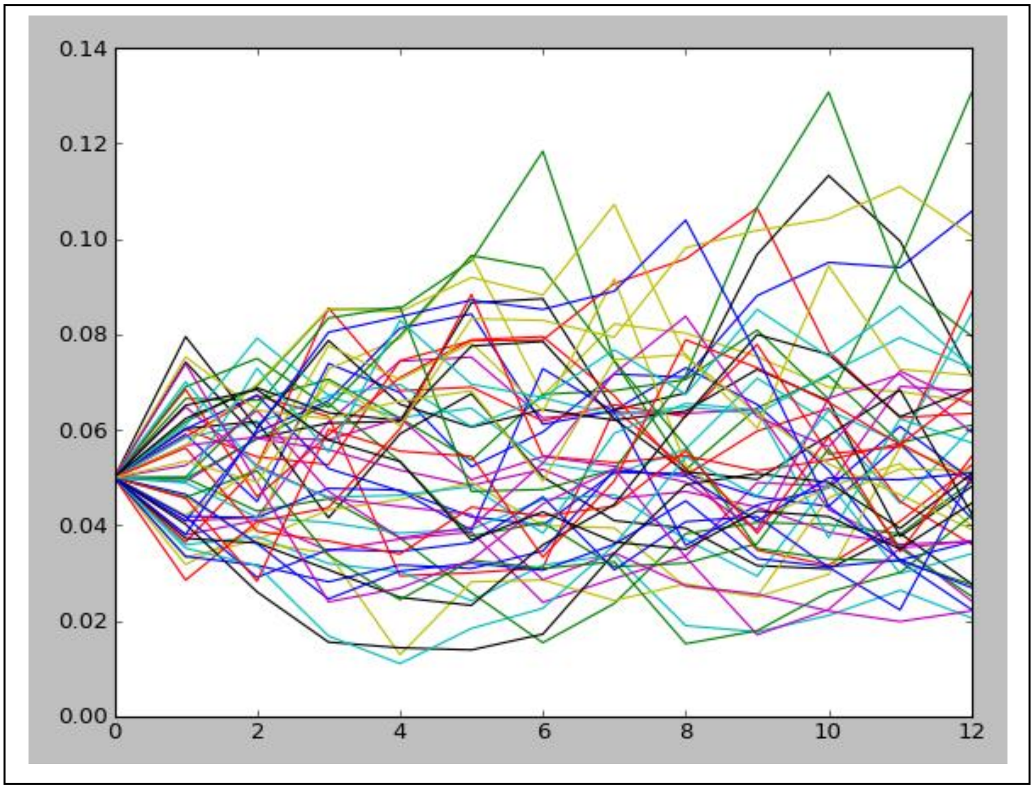
$CHI'^2_d(\lambda)$ es la distribución CHI cuadrado no centrada con d grados de libertad y parámetro λ, y

$$d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t-u)}}{\sigma^2\left(1 - e^{-\kappa(t-u)}\right)} r(u)$$

Se puede demostrar que r(t) tiene la misma distribución para cualquier t, es decir que es estacionaria. Por ello, si podemos obtener una muestra de una distribución CHI cuadrada no centrada podemos simular nuestro proceso de difusión tipo raíz cuadrada.

En la Figura 1 se observan 50 simulaciones del proceso de CIR donde la tasa de interés inicial es 5% y se tienen 12 períodos igualmente distribuidos. Esto es $\Delta t = 1/12 = 0.0833$

Figura 1



Veamos un ejemplo de cálculo pasando de $r(t_0)$ a $r(t_1)$. Como mencionamos anteriormente la tasa de interés inicial, es decir para $t=t_0=0$, es el 5%. Para calcular $r(t_1)$ necesitamos los parámetros del modelo de CIR. Estos parámetros se pueden obtener aplicando alguna técnica de calibración tal y como se ilustra en nuestro documento "SIMULACIÓN MC DE PROCESO VACISEK".

Supongamos en nuestro caso que $\kappa = 2$, $\theta = 5\%$ y $\sigma = 20\%$. En esta caso podemos calcular d y λ para obtener:

$$d = \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2} = 10$$

$$\lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_1-t_0)}}{\sigma^2\left(1-e^{-\kappa(t_1-t_0)}\right)} r(t_0) = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_1-t_0)}}{\sigma^2\left(1-e^{-\kappa(t_1-t_0)}\right)} \cdot 0.05 = 55.1388$$

Notemos que en este caso t_1-t_0 = 0.0833

Con estos valores podemos calcular el valor de una variable aleatoria CHI cuadrado con d grados de libertad y parámetro λ. Para ello podemos usar el método de la transformada inversa. En este método simulamos variables aleatorias uniformes en el intervalo (0,1) y luego con ellas obtenemos variables aleatorias de otra distribución. Si obtuviéramos una variable uniforme con valor 0.5750, la variable CHI cuadrado correspondiente sería 67.1220. De esta manera podemos obtener el valor de la tasa de interés $r(t_1)$ haciendo

$$r(t_1) = \frac{\sigma^2\left(1-e^{-\kappa(t_1-t_0)}\right)}{4\kappa} \cdot CHI'^2_d(\lambda) = 0.000768 \cdot 67.1220 = 0.0515$$

,

Si queremos obtener el valor de r(t2) repetimos el procedimiento anterior con un λ de

$$\lambda = \frac{4\kappa e^{-\kappa(t_1-t_0)}}{\sigma^2\left(1-e^{-\kappa(t_1-t_0)}\right)} r(t_1)$$

y generando una nueva variable aleatoria CHI cuadrado.