# SIMULACIÓN MC DE PROCESOS DE SALTO-DIFUSIÓN

Un proceso de salto difusión viene descrito por la ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t_-)dt + \sigma S(t_-)dW(t) + S(t_-)dJ(t)$$

Notemos que los primeros dos términos de la ecuación nos recuerdan el proceso denominado Movimiento Browniano Geométrico (MBG). Este proceso es muy importante en las finanzas debido entre otros aspectos a su relación con la "Fórmula de Black-Scholes". En el documento "SIMULACIÓN MONTECARLO MBG" explicamos con detalle cómo realizar una simulación de Montecarlo de dicho proceso estocástico.

Ahora, una de las críticas más importantes que le hacen al MBG es que la distribución de retornos asociada a este proceso es normal, mientras que en la práctica las distribuciones de retornos que se observan son leptocúrticas.

Una de las razones por las que existen distribuciones leptocúrticas en los retornos de los activos financieros es por la presencia de saltos. Por ello un proceso de salto-difusión es mucho más completo que un simple proceso de difusión como el MBG. Vamos a ver a continuación que este proceso no es mucho más complejo de simular. Sin embargo deben tenerse en cuenta algunas particularidades.

El proceso J(t) es un proceso independiente del Movimiento Browniano W(t) y está definido por

$$J(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - 1$$

donde $Y_j$ son variables aleatorias y N(t) es un proceso de conteo del tipo Poisson.

Para trabajar en un mundo neutral al riesgo debemos utilizar la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = (r - \tilde{\lambda} m) S(t_-) dt + \sigma S(t_-) dW(t) + S(t_-) dJ(t)$$

La solución a esta ecuación viene dada por:

$$S(t) = S(0) \exp\left\{\left(r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W(t)\right\} \prod_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

En este caso los parámetros indican lo siguiente:

r: Tasa de interés constante

$\tilde{\lambda}$ : Intensidad del proceso de Poisson compuesto J(t)

$Y_i$: Variable aleatoria que denota el tamaño de salto

m: Esperanza del tamaño del salto $Y_i$ menos 1 unidad.

N(t): Proceso de conteo que indica el número de saltos que se producen hasta t.

Se puede consultar el Anexo 1 para mirar el detalle de estas fórmulas y el significado de cada término. Podemos discretizar la ecuación anterior para obtener:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left\{\left(r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma [W(t_{i+1}) - W(t_i)]\right\} \prod_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} Y_j$$

Si hacemos $X(t) = \ln[S(t)]$ obtenemos

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma [W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sum_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} \ln(Y_j)$$

Si hacemos $\Delta$ = $t_{i+1}$-$t_i$ obtenemos

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta + \sigma \cdot Z_{1i}\sqrt{\Delta} + \sum_{j=N(t_i)+1}^{N(t_{i+1})} \ln(Y_j)$$

donde $Z_{1i}$ es una variable aleatoria normal.

Si además suponemos que las $Y_j$ se distribuyen lognormales con media a y desviación estándar b podemos afirmar que

$$\ln(Y_j) \sim N(a, b^2)$$

y de esta forma para un n fijo tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_j) \sim N(an, b^2 n) = an + b\sqrt{n} Z_2$$

donde $Z_2$ es una variable aleatoria normal (0,1). Allí vemos que para simular una suma de variables aleatorias normales nos basta generar una sola variable aleatoria normal (0,1) y escalarla por a y b.

De esta forma nuestra ecuación recursiva se convierte en:

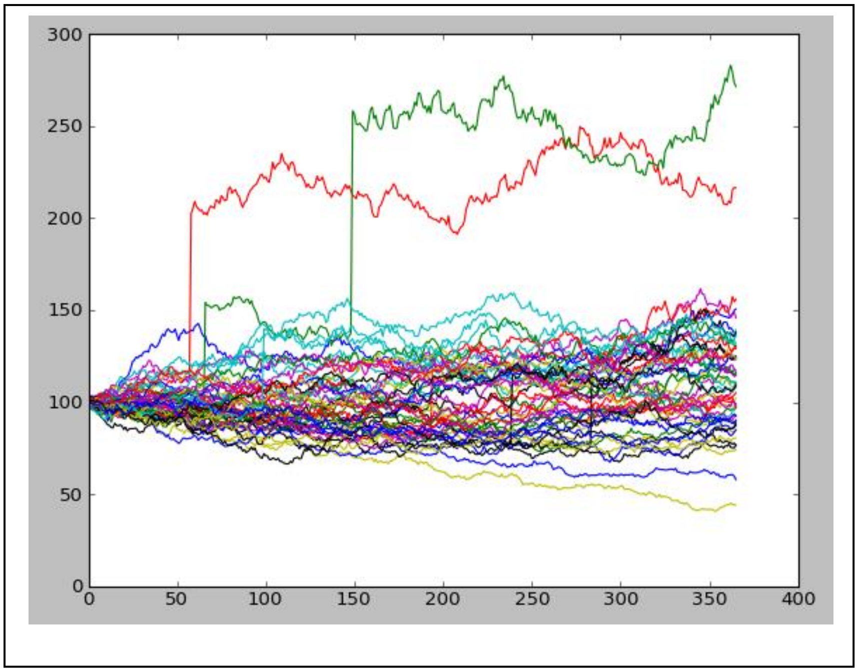
$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left(r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta + \sigma \cdot Z_{1i}\sqrt{\Delta} + aN_i + b\sqrt{N_i} \cdot Z_{2i}$$

donde Ni es una variable aleatoria Poisson que indica el número de saltos entre los tiempos $t_i$ y $t_{i+1}$.

De esta manera para simular un proceso de salto difusión en donde los saltos son independientes e idénticamente distribuidos tipo lognormal nos bastará con generar conjuntos de 2 variables aleatorias normales y 1 Poisson. Para recuperar el proceso original S(t) bastará con hacer exp[X(t)]. En el Anexo 2 se explica cómo obtener variables aleatorias del tipo Poisson.

Es importante anotar que si $N_i = 0$, lo cual indica que no hubo ningún salto en el período $t_i$, la simulación de Montecarlo del proceso es exactamente igual que la de un MBG. Un ejemplo detallado de esta simulación lo puede encontrar en el documento "SIMULACIÓN MONTECARLO MBG". En la Figura 1 puede observarse la simulación de un proceso de salto difusión con los siguientes parámetros: $S(t_0)$ = 100, r = 10%, $\sigma$ = 25%, $\lambda$=0.1, a=0.5, b=0.1

**Figura 1**




Allí se puede observar como existen algunos momentos del tiempo en donde el activo subyacente salta. La mayor parte de las observaciones se encuentran en un rango de 50-150 al vencimiento pero las asociadas a los saltos tienen valores superiores a los 200.

El proceso de salto difusión también puede ser simulado cuando las variables aleatorias tienen un tamaño de salto que sigue otra distribución diferente de la lognormal. En el Anexo 3 se ilustra esta situación.

Adjunto a este documento se encuentra un archivo en Python en el cual se muestra el código para la simulación de Montecarlo. Este hace uso de la librería Numpy y Pylab. También se adjunta el código para la generación de variables aleatorias tipo Poisson.

**Anexo 1**

La ecuación diferencial estocástica

$$dS(t) = \mu S(t_-)dt + \sigma S(t_-)dW(t) + S(t_-)dJ(t)$$

describe un proceso de salto difusión. Notemos que escribimos S(t_) para el activo subyacente con el fin de reconocer que este es el precio del activo un instante antes de que este salte. Adicionalmente el proceso J(t) se denomina proceso de poisson compuesto y viene definido por:

$$J(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j - 1$$

N(t) es un proceso de conteo del tipo poisson definido como

$$N(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\}$$

Esto significa que hay tiempos de llegada aleatorios $\tau$i y N(t) cuenta el número de llegadas en el intervalo [0,t]. El símbolo dJ(t) hace referencia al salto en el tiempo t. El tamaño de este salto viene dado por $Y_j$-1 si $t=\tau_j$ y es igual a cero si t no coincide con algún $\tau_j$. Veamos esto más detalladamente.

El salto en S en el tiempo t viene dado por S(t) – S(t_). Esto es cero a no ser que exista un salto exactamente en $t=\tau_j$ para algún j. El salto en $\tau_j$ es entonces

$$S(\tau_j) - S(\tau_{j-}) = S(\tau_{j-})\Delta J(\tau_j) = S(\tau_{j-})[J(\tau_j) - J(\tau_{j-})] = S(\tau_{j-})[Y_j - 1]$$

$$\rightarrow S(\tau_j) = S(\tau_{j-})Y_j$$

Esto muestra que $Y_j$ es el cociente entre el precio del activo antes del salto y después del salto.

$$\frac{S(\tau_j)}{S(\tau_{j-})} = Y_j .$$

De allí que $Y_j$ -1 refleje el retorno porcentual debido al salto. Si restringimos $Y_j$ para ser estrictamente positivo podemos garantizar que S(t) nunca se vuelva negativo.

Veamos ahora con mayor detalle porque la ecuación

$$S(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda m - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}\prod_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

es la solución a la ecuación diferencial

$$dS(t) = (\mu - \lambda m)S(t_-)dt + \sigma S(t_-)dW(t) + S(t_-)dJ(t)$$

Sabemos que

$$m = E(Y_j) - 1$$

Por lo tanto la media del proceso de salto viene dada por $\lambda$m y la ecuación diferencial anterior viene realmente descrita por

$$dS(t) = \mu S(t_-)dt + \sigma S(t_-)dW(t) + S(t_-)d[J(t) - \lambda m]$$

En ese caso $d[J(t) - \lambda m]$ es una martingala

Si hacemos

$$A(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda m - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right\}$$

$$B(t) = \prod_{j=1}^{N(t)} Y_j$$

Podemos expresar

$$S(t) = A(t) \cdot B(t)$$

Aplicando la fórmula de Ito del producto a esta ecuación obtenemos:

$$S(t) = A(t) \cdot B(t) = A(0) \cdot B(0) + \int_0^t A(t_-) \cdot dB(t) + \int_0^t B(t) \cdot dA(t) + \langle A(t), B(t) \rangle$$

donde el último término indica la covariación cuadrática entre A(t) y B(t). Este término es cero dado que A(t) es un proceso continuo y B(t) es un proceso de salto, de ahí que:

$$S(t) = A(0) \cdot B(0) + \int_0^t A(t_-) \cdot dB(t) + \int_0^t B(t) \cdot dA(t)$$

Debido a que

$$dA(t) = [\mu - \lambda m]A(t)dt + \sigma A(t)dW(t)$$

Tenemos

$$S(t) = A(0)\cdot B(0) + \int_0^t A(t_-)\cdot dB(t) + \int_0^t B(t)\cdot[\mu - \lambda m]A(t)dt + \int_0^t B(t)\cdot \sigma A(t)dW(t)$$

que en forma diferencial se puede escribir como:

$$dS(t) = A(t_-)\cdot dB(t) + B(t)\cdot[\mu - \lambda m]A(t)dt + B(t)\cdot \sigma \cdot A(t)dW(t)$$

$$dS(t) = A(t_-)\cdot B(t_-)dJ(t) + B(t)\cdot[\mu - \lambda m]A(t)dt + B(t)\cdot \sigma \cdot A(t)dW(t)$$

$$dS(t) = S(t_-)dJ(t) + S(t)\cdot[\mu - \lambda m]dt + S(t)\cdot \sigma \cdot dW(t)$$

Y esta última es nuestra ecuación diferencial estocástica.

$$dS(t) = S(t)\cdot[\mu - \lambda m]dt + S(t)\cdot \sigma \cdot dW(t) + S(t_-)dJ(t)$$

**Anexo 2**

Para simular variables aleatorias del tipo Poisson podemos seguir el siguiente procedimiento basado en la transformada inversa:

Sabemos que la función de probabilidad acumulada de Poisson está definida como

$$F(n) = P(N \leq n) = P(N = 0) + P(N = 1) + \cdots + P(N = n)$$

En lugar de calcular cada uno de los términos en esta suma, podemos usar las relaciones

$$P(N = k + 1) = \frac{P(N = k) \cdot \lambda}{k + 1}$$

Esto debido a que

$$P(N = k + 1) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k+1}}{(k + 1)!} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k} \lambda}{k!(k + 1)} = P(N = k)\frac{\lambda}{(k + 1)}$$

Para aplicar esto podemos seguir el siguiente algoritmo:

1. Definir $p = e^{-\lambda}$, esto es la probabilidad de tener 0 eventos es decir

   $$P(N = 0) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{0}}{0!} = e^{-\lambda}$$

2. Definir F como la probabilidad acumulada. Fijarla inicialmente como F = p
3. Definir N e inicializarla N = 0
4. Generar variable aleatoria uniforme en el intervalo [0,1] y llamarla U
5. Mientras U > F iterar el siguiente ciclo
   a. N = N+1
   b. p = p$\lambda$/N [esto es P(N = k+1)]
   c. F = F + p

Se adjunta el archivo de Python PoissonGenerator.py en donde está programado el método.

**Anexo 3**

La distribución del tamaño de los saltos no necesariamente debe ser lognormal. Cuando esta sigue cualquier otro tipo de distribución podemos usar el siguiente algoritmo para simular un proceso de salto difusión:

1. Generar variable aleatoria normal (0,1) y llamarla Z
2. Generar variable aletoria Poission con parámetro $\lambda(t_{i+1}-t_i)$ y llamarla N.
3. Definir M
4. Si N = 0 haga M = 0 y vaya al paso 6
5. Generar log $Y_1$, log $Y_2$, …., log $Y_N$ para alguna distribución de probabilidad común a $Y_i$. Asigne a M el valor M = log $Y_1$ + log $Y_2$ + ….+ log $Y_N$
6. Defina $X(t_{i+1}) = X(t_i) + \left( r - \tilde{\lambda} m - \frac{\sigma^2}{2} \right)\Delta + \sigma \cdot Z_{1i}\sqrt{\Delta} + M$