SIMULACIÓN MONTECARLO VACISEK

El proceso de Vacisek viene descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

Este proceso es del tipo reversión a la media y se clasifica como un proceso Orhnstein-Uhlenbeck. Oldrich Vacisek propuso el modelo en 1977 para describir la evolución de la tasa spot instantánea r(t). El modelo tiene una sola fuente de incertidumbre descrita por el proceso de Wiener dW(t) y por lo tanto se clasifica como un modelo de 1 factor. El modelo ha sido bastante popular y es utilizado principalmente para fines académicos. Una variante del modelo de Vacisek es el modelo de Hull y White el cual es mucho más utilizado en la práctica pues permite una calibración exacta a la estructura temporal de las tasas de interés.

Como se mencionaba anteriormente, uno de los grandes aportes del modelo de Vacisek fue la característica de reversión a la media. Este es un hecho estilizado en las tasas de interés. Cuando han subido mucho empiezan a quitarle dinamismo a la economía y tienden a caer. Lo contrario ocurre cuando las tasas son bajas.

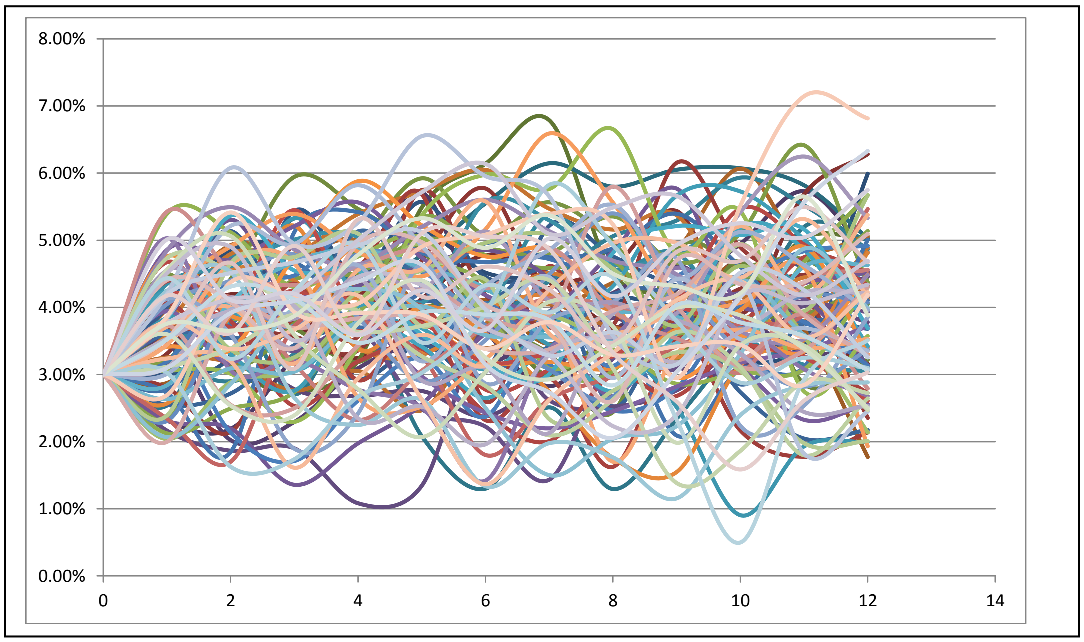
Una crítica importante que se le hace al modelo de Vacisek es la posibilidad de tener tasas de interés negativas. Si bien es un fenómeno que se ha observado en algunas situaciones no es lo usual en las economías. Una solución a este inconveniente se da con el ”Proceso de CIR”.

El modelo de Vacisek hace parte de los modelos afines. Estos modelos generalmente tienen fórmulas analíticas para calcular el precio de un bono cero cupón o de opciones sobre los mismos. A partir de estas fórmulas es relativamente sencillo calibrar el modelo a datos de mercado. Como mencionábamos anteriormente, mediante el modelo de Vacisek no es posible calibrar de manera exacta la estructura temporal de las tasas de interés debido a que tenemos pocos parámetros. Sin embargo se pueden obtener parámetros minimizando las diferencias entre los precios de mercado y los teóricos calculados cambiando dichos parámetros.

En el Anexo 1 ilustramos como se puede solucionar la ecuación diferencial estocásticas asociada al proceso de Vacisek para poder realizar una simulación de Montecarlo de la tasa corta. En la Figura 1 se pueden observar un conjunto de simulaciones cuando utilizamos los siguientes parámetros:

r(0)	3.00%
θ	4.00%
κ	2
σ	1.00%
Δt	0.25

Figura 1



Se adjunta un archivo de EXCEL con la implementación del modelo.

ANEXO 1

El proceso de Vacisek viene descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

Este proceso es del tipo reversión a la media y se clasifica como un proceso Orhnstein-Uhlenbeck. Para hallar una solución debemos usar no el diferencial dr(t) sino $d\left[e^{\kappa t} r(t)\right]$, veamos

Si definimos

$$f[t, r(t)] = e^{\kappa t} r(t)$$

podemos aplicar el Lema de Ito para obtener $d\left[e^{\kappa t} r(t)\right]$

Notemos que la derivadas parciales vienen dadas por:

$$f_t[t, r(t)] = \kappa e^{\kappa t} r(t)$$

$$f_r[t, r(t)] = e^{\kappa t}$$

$$f_{rr}[t, r(t)] = 0$$

Así entonces tenemos que

$$d\left[e^{\kappa t} r(t)\right] = \kappa e^{\kappa t} r(t) dt + e^{\kappa t} dr(t)$$

$$d\left[e^{\kappa t} r(t)\right] = \kappa e^{\kappa t} r(t) dt + e^{\kappa t} \left[\kappa[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)\right]$$

$$d\left[e^{\kappa t} r(t)\right] = \kappa e^{\kappa t} \theta dt + e^{\kappa t} \sigma dW(t)$$

$$d\left[e^{\kappa t} r(t)\right] = e^{\kappa t} \left[\kappa \theta dt + \sigma dW(t)\right]$$

De esta manera podemos integrar entre 0 y t

$$\int_0^t d\left[e^{\kappa s} r(s)\right] = \int_0^t e^{\kappa s}\left[\kappa\theta ds + \sigma dW(s)\right]$$

$$e^{\kappa t} r(t) - e^{\kappa 0} r(0) = \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW(s)$$

$$e^{\kappa t} r(t) - e^{\kappa 0} r(0) = \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW(s)$$

Si hacemos un cambio de variable del tipo $u = \kappa s$ tenemos que $du = \kappa ds$ y de esta forma

$$e^{\kappa t} r(t) - r(0) = \theta \int_0^t e^{u} du + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW(s)$$

$$e^{\kappa t} r(t) - r(0) = \theta\left[e^{\kappa t} - 1\right] + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} dW(s)$$

Se puede demostrar que:

$$\int_0^t e^{\kappa s} dW(s) = \sqrt{\int_0^t e^{2\kappa s} ds} \cdot X$$

donde $X \sim N(0,1)$

Si aplicamos nuevamente un cambio de variable del tipo $u = 2\kappa s$ tenemos que $du = 2\kappa ds$ y de esta forma

$$e^{\kappa t} r(t) - r(0) = \theta\left[e^{\kappa t} - 1\right] + \sigma \sqrt{\frac{\int_0^t e^{u} ds}{2\kappa}} \cdot X$$

$$e^{\kappa t} r(t) - r(0) = \theta\left[e^{\kappa t} - 1\right] + \sigma \sqrt{\frac{\left[e^{2\kappa t} - 1\right]}{2\kappa}} \cdot X$$

$$r(t) = e^{-\kappa t}\left\{ r(0) + \theta\left[e^{\kappa t} - 1\right] + \sigma \sqrt{\frac{\left[e^{2\kappa t} - 1\right]}{2\kappa}} \cdot X \right\}$$

Si en lugar de integrar entre 0 y t lo hubiéramos hecho entre t_j y t_{j+1} habríamos obtenido lo siguiente:

$$e^{\kappa t_{j+1}} r(t_{j+1}) - e^{\kappa t_j} r(t_j) = \theta\left[e^{\kappa t_{j+1}} - e^{\kappa t_j}\right] + \sigma \sqrt{\frac{\left[e^{2\kappa t_{j+1}} - e^{2\kappa t_j}\right]}{2\kappa}} \cdot X$$

Y si hacemos

$t_j = j\Delta$ donde Δ = T/d (T: Tiempo total, d: Número de intervalos)

obtenemos

$$e^{\kappa(j+1)\Delta} r(t_{j+1}) - e^{\kappa j\Delta} r(t_j) = \theta\left[e^{\kappa(j+1)\Delta} - e^{\kappa j\Delta}\right] + \sigma\sqrt{\frac{\left[e^{2\kappa(j+1)\Delta} - e^{2\kappa j\Delta}\right]}{2\kappa}} \cdot X$$

$$e^{\kappa(j+1)\Delta} r(t_{j+1}) = e^{\kappa j\Delta} r(t_j) + \theta\left[e^{\kappa j\Delta}\left(e^{\kappa\Delta} - 1\right)\right] + \sigma\sqrt{\frac{\left[e^{2\kappa j\Delta}\left(e^{2\kappa\Delta} - 1\right)\right]}{2\kappa}} \cdot X$$

$$r(t_{j+1}) = \frac{e^{\kappa j\Delta} r(t_j) + \theta\left[e^{\kappa j\Delta}\left(e^{\kappa\Delta} - 1\right)\right] + \sigma \cdot e^{\kappa j\Delta}\sqrt{\frac{\left[\left(e^{2\kappa\Delta} - 1\right)\right]}{2\kappa}} \cdot X}{e^{\kappa j\Delta} e^{\kappa\Delta}}$$

$$r(t_{j+1}) = \frac{r(t_j) + \theta \cdot \left(e^{\kappa\Delta} - 1\right) + \sigma\sqrt{\frac{\left[\left(e^{2\kappa\Delta} - 1\right)\right]}{2\kappa}} \cdot X}{e^{\kappa\Delta}}$$

$$r(t_{j+1}) = e^{-\kappa\Delta} r(t_j) + \theta \cdot \left(1 - e^{-\kappa\Delta}\right) + \sigma\sqrt{\frac{\left[\left(1 - e^{-2\kappa\Delta}\right)\right]}{2\kappa}} \cdot X$$

Esta última es nuestra ecuación recursiva para simular el proceso.